



# Introduction aux théories homologiques

Jean-Yves Welschinger

## ► To cite this version:

Jean-Yves Welschinger. Introduction aux théories homologiques. Master. École normale supérieure de Lyon, France. 2015, 70 p. cel-01331009

**HAL Id: cel-01331009**

**<https://hal.science/cel-01331009>**

Submitted on 13 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Introduction aux théories homologiques

Jean-Yves Welschinger\*

Juin 2016

Ce cours débute par quelques rappels sur les espaces topologiques et variétés différentielles ainsi que sur le problème de classification des variétés qui motive la suite du cours. Le second paragraphe est consacré à l'aspect algébrique des théories d'homologies, l'algèbre homologique, et culmine avec les formules des coefficients universels. Le troisième paragraphe est consacré à plusieurs incarnations des homologie et cohomologie en géométrie. On présente dans ce paragraphe les théories de de Rham, simpliciale, singulière et cellulaire et démontre plusieurs versions du théorème de de Rham et de la dualité de Poincaré. Enfin, le dernier paragraphe est consacré à une introduction à la théorie des faisceaux, où l'on étudie les notions de faisceau, faisceau image, cohomologie de Čech et cohomologie des faisceaux.

Ces notes de cours ont été rédigées par Matthieu Dussaule. Il s'agit d'un cours de niveau Master 2 dispensé durant l'automne 2015 à l'École normale supérieure de Lyon dans le cadre du Master de Mathématiques Avancées de 2ème année.

## Table des matières

|     |                                                  |    |
|-----|--------------------------------------------------|----|
| 1   | Espaces topologiques et variétés différentielles | 3  |
| 1.1 | Espaces topologiques . . . . .                   | 3  |
| 1.2 | Variétés différentielles . . . . .               | 4  |
| 1.3 | Classification des variétés . . . . .            | 7  |
| 2   | Homologie et cohomologie                         | 10 |
| 2.1 | Complexes de chaînes et de cochaînes . . . . .   | 10 |
| 2.2 | Suites exactes de complexes . . . . .            | 12 |
| 2.3 | Formules des coefficients universels . . . . .   | 15 |
| 3   | Exemples en géométrie                            | 20 |
| 3.1 | Cohomologie de de Rham . . . . .                 | 20 |

---

\*Université de Lyon, Université Lyon 1, CNRS, Institut Camille Jordan.

|       |                                                              |    |
|-------|--------------------------------------------------------------|----|
| 3.1.1 | Définitions . . . . .                                        | 20 |
| 3.1.2 | Suites de Mayer-Vietoris . . . . .                           | 23 |
| 3.1.3 | Dualité de Poincaré, première version . . . . .              | 26 |
| 3.1.4 | Formule de Künneth . . . . .                                 | 32 |
| 3.2   | Homologie simpliciale . . . . .                              | 34 |
| 3.2.1 | Complexes simpliciaux . . . . .                              | 34 |
| 3.2.2 | Homologie et cohomologie simpliciales . . . . .              | 36 |
| 3.2.3 | Subdivision barycentrique . . . . .                          | 39 |
| 3.3   | Homologie singulière . . . . .                               | 40 |
| 3.3.1 | Complexes singuliers . . . . .                               | 40 |
| 3.3.2 | Théorème de de Rham . . . . .                                | 44 |
| 3.4   | Homologie cellulaire . . . . .                               | 47 |
| 3.4.1 | Complexe cellulaire . . . . .                                | 47 |
| 3.4.2 | Homologie cellulaire . . . . .                               | 47 |
| 3.4.3 | Dualité de Poincaré, seconde version . . . . .               | 50 |
| 4     | Faisceaux . . . . .                                          | 52 |
| 4.1   | Faisceaux, préfaisceaux et morphismes de faisceaux . . . . . | 52 |
| 4.2   | Cohomologie de Čech d'un faisceau . . . . .                  | 55 |
| 4.2.1 | Définition . . . . .                                         | 55 |
| 4.2.2 | Exemples . . . . .                                           | 60 |
| 4.3   | Cohomologie des faisceaux . . . . .                          | 61 |
| 4.3.1 | Résolutions et théorème de de Rham . . . . .                 | 61 |
| 4.3.2 | Faisceaux injectifs . . . . .                                | 63 |
| 4.3.3 | Résolution canonique . . . . .                               | 68 |
|       | Références . . . . .                                         | 69 |

# 1 Espaces topologiques et variétés différentielles

On pourra consulter [2] pour en connaître davantage sur ce paragraphe.

## 1.1 Espaces topologiques

**Définition 1.1.** Une topologie sur un ensemble  $X$  est la donnée de sous-ensembles de  $X$ , que l'on appelle ouverts, qui vérifient :

- l'intersection de deux ouverts est un ouvert,
- une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert,
- l'ensemble vide et l'espace  $X$  tout entier sont ouverts.

Le complémentaire d'un ouvert est par définition un fermé.

**Définition 1.2.** Un espace topologique est dit connexe lorsqu'il n'est pas réunion disjointe de deux ouverts non triviaux. Il est dit séparé lorsque pour tous éléments distincts  $x$  et  $y$ , il existe deux ouverts disjoints  $U$  et  $V$  tels que  $x \in U$  et  $y \in V$ .

**Définition 1.3.** Un recouvrement d'ouverts  $\mathcal{U}$  de l'espace topologique  $X$  est un sous-ensemble d'ouverts dont la réunion vaut  $X$ . Il est dit localement fini lorsque chaque point de  $X$  possède un voisinage contenu seulement dans un nombre fini d'ouverts de ce recouvrement  $\mathcal{U}$ . On dit aussi qu'un recouvrement  $\mathcal{V}$  raffine le recouvrement  $\mathcal{U}$  lorsque tout élément de  $\mathcal{V}$  est contenu dans un élément de  $\mathcal{U}$ .

**Définition 1.4.** Un espace topologique est dit compact lorsqu'il est séparé et que tout recouvrement d'ouverts possède un sous-recouvrement fini. Il est dit paracompact lorsque tout recouvrement d'ouverts possède un raffinement localement fini.

Contre-exemple 1.5. La droite longue n'est pas paracompacte.

**Théorème 1.6.** Soit  $X$  un espace topologique paracompact. Alors tout recouvrement d'ouverts  $\mathcal{U}$  de  $X$  possède une partition de l'unité subordonnée  $\{f_V, V \in \mathcal{V}\}$ , c'est-à-dire telle que :

- Le recouvrement  $\mathcal{V}$  est un raffinement localement fini de  $\mathcal{U}$ ,
- Pour tout ouvert  $V$  de  $\mathcal{V}$ , la fonction  $f_V : X \rightarrow [0, 1]$  est continue à support dans  $V$ ,
- La somme  $\sum_{V \in \mathcal{V}} f_V$  est constante égale à 1.

De plus, si  $\mathcal{U}$  est localement fini, on peut choisir  $\mathcal{V} = \mathcal{U}$

Démonstration. Voir la démonstration du Théorème 12.8 de [2]. □

**Définition 1.7.** Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  entre espaces topologiques est une application pour laquelle la préimage de tout ouvert est un ouvert. C'est un homéomorphisme lorsqu'elle est bijective, continue et d'inverse continue.

**Définition 1.8.** Deux applications continues  $f_0 : X \rightarrow Y$  et  $f_1 : X \rightarrow Y$  sont dites homotopes lorsqu'elles sont reliées par une homotopie, c'est-à-dire par une application continue  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que  $F|_{X \times \{0\}} = f_0$  et  $F|_{X \times \{1\}} = f_1$ .

**Définition 1.9.** On dit qu'une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie lorsqu'il existe une application continue  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $g \circ f$  et  $f \circ g$  soient homotopes à l'identité (de  $X$  et de  $Y$  respectivement).

Dans ce cas les espaces topologiques  $X$  et  $Y$  sont dits homotopiquement équivalents, ou de même type d'homotopie. Un espace topologique est dit contractile lorsqu'il est homotopiquement équivalent à un singleton.

*Exemple 1.10.* 1. L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  ou plus généralement tout sous-ensemble convexe ou étoilé est contractile.

2. La sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  a le même type d'homotopie que  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

**Définition 1.11.** On dit qu'un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  est un rétract par déformation de  $X$  lorsqu'il existe une homotopie  $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $f_0 = \text{Id}_X$  et  $\text{Im}(f_1) \subset Y$  avec  $(f_1)|_Y = \text{Id}_Y$ , où  $f_0 = F|_{X \times \{0\}}$  et  $f_1 = F|_{X \times \{1\}}$ . Les exemples précédents (*Exemple 1.10*) sont des rétracts par déformation.

## 1.2 Variétés différentielles

**Définition 1.12.** Une variété différentielle de dimension  $n$  est un espace topologique séparé  $M$  recouvert par un nombre au plus dénombrable de cartes.

Une carte est la donnée d'un ouvert  $U$  de  $M$ , d'un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  et d'un homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$  tels que lorsque deux cartes  $(U_1, \varphi_1)$  et  $(U_2, \varphi_2)$  se rencontrent, l'application de changement de cartes  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$  soit un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

La variété  $M$  est aussi appelée surface lorsque  $n = 2$  et courbe lisse lorsque  $n = 1$ . La réunion des cartes est appelée atlas. Deux atlas sont dits compatibles lorsque leur réunion est un atlas.

*Contre-exemples 1.13.* 1. La réunion de deux copies de  $\mathbb{R}^2$  où l'on identifie les points de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  n'est pas une variété parce-qu'elle n'est pas séparée.

2. La droite longue n'est pas une variété. En fait toute variété est paracompacte.

*Exemple 1.14.* 1. Les premiers exemples de variétés différentielles sont  $\mathbb{R}^n$  (l'espace modèle), la sphère  $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$  et le tore  $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \Lambda$  où  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbb{R}^n$ .

2. Les espaces projectifs.

L'espace projectif réel  $\mathbb{R}P^n$ , aussi noté  $P(\mathbb{R}^{n+1})$  ou  $P_{\mathbb{R}}^n$ , est l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . C'est le quotient  $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / (x \sim \lambda x, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*)$ . L'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$ , aussi noté  $P(\mathbb{C}^{n+1})$  ou  $P_{\mathbb{C}}^n$ , est l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . C'est le quotient  $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / (x \sim \lambda x, \forall \lambda \in \mathbb{C}^*)$ .

Ce sont des variétés différentielles compactes connexes de dimension  $n$  et  $2n$  respectivement.

3. Les groupes linéaires  $GL_n(\mathbb{C})$ ,  $GL_n(\mathbb{R})$ ,  $SL_n(\mathbb{C})$ ,  $SL_n(\mathbb{R})$ ,  $SU_n$ ,  $U_n$ ,  $SO_n$ ,  $O_n$ , etc... sont des variétés différentielles. Mieux, ce sont des groupes de Lie.

4. Les espaces lenticulaires

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers premiers entre eux. Le groupe  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  agit sur la sphère unité  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$  par restriction de l'action

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (\bar{k}, (z_1, z_2)) &\mapsto (e^{\frac{2i\pi k}{p}} z_1, e^{\frac{2i\pi qk}{p}} z_2). \end{aligned}$$

Le quotient de  $\mathbb{S}^3$  par cette action est noté  $L(p, q)$  et appelé espace lenticulaire de dimension 3. C'est une variété compacte de dimension trois.

5. Les autres quotients de la sphère par des groupes finis agissant sans point fixe, comme la sphère de Poincaré, sont des variétés compactes de dimension 3.

6. Les suspensions de difféomorphismes

Soit  $M$  une variété et  $\varphi : M \rightarrow M$  un difféomorphisme. Le groupe  $\mathbb{Z}$  agit sur  $M \times \mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (M \times \mathbb{R}) &\rightarrow M \times \mathbb{R} \\ (k, (x, t)) &\mapsto (\varphi^k(x), t + k). \end{aligned}$$

Le quotient de  $M \times \mathbb{R}$  par cette action fournit une variété  $V$  de dimension  $n + 1$  appelée suspension du difféomorphisme  $\varphi$ .

La projection  $(x, t) \in M \times \mathbb{R} \mapsto t \bmod \mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$  passe au quotient en une submersion  $\pi : V \rightarrow \mathbb{S}^1$  dont les fibres sont difféomorphes à  $M$ .

7. Les fibrés de Seifert

Dans le cas de la rotation  $\varphi$  d'angle rationnel  $q/p$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers entre eux, sur le disque  $\Delta := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  de dimension deux, la suspension de  $\varphi$  fournit une variété de dimension trois partitionnée par des cercles.

De plus, la suspension de  $\varphi|_{\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}}$  fournit un ouvert  $V^*$  de  $V$  difféomorphe à  $\Delta^* \times \mathbb{S}^1$ .

Un fibré de Seifert est une variété de dimension trois compacte, partitionnée par des cercles, obtenue en recollant de telles suspensions le long d'ouverts de  $V^*$  saturés par des cercles.

**Définition 1.15.** Une variété différentielle est dite orientable lorsqu'elle possède un atlas dont toutes les applications de changements de cartes ont une différentielle qui préserve l'orientation de  $\mathbb{R}^n$ .

*Exemple 1.16.* 1. L'espace projectif  $\mathbb{R}P^n$  est orientable si et seulement si  $n$  est impair.

2. La suspension de  $id : ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  est orientable, c'est un cylindre. La suspension de  $-id : ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  n'est pas orientable, c'est le ruban de Moëbius.

**Proposition 1.17.** Une variété différentielle de dimension  $n$  est orientable si et seulement si elle possède une forme différentielle de degré  $n$  qui ne s'annule pas.

**Définition 1.18.** Une application  $f : M \rightarrow N$  entre variétés différentielles est dite différentiable lorsque pour toutes cartes  $\varphi : U \rightarrow V$  de  $M$  et  $\psi : U' \rightarrow V'$  de  $N$ , la composée  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est différentiable entre ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $f$  est un difféomorphisme lorsque  $f$  est bijective et  $f$  et  $f^{-1}$  sont différentiables.

Étant données deux variétés connexes orientées  $M$  et  $N$  de dimension  $n$ , on peut former une nouvelle variété de dimension  $n$  connexe et orientée, que l'on note  $M \sharp N$  et qu'on appelle somme connexe de  $M$  et  $N$ , en procédant de la façon suivante :

1. On choisit des plongements  $i_M : D^n \rightarrow M$  et  $i_N : D^n \rightarrow N$ , où  $D^n$  est le disque unité ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $i_M$  (respectivement  $i_N$ ) préserve (respectivement renverse) l'orientation.
2. On recolle  $M \setminus \{i_M(0)\}$  et  $N \setminus \{i_N(0)\}$  le long de  $i_M(D^n \setminus \{0\})$  et  $i_N(D^n \setminus \{0\})$  à l'aide de l'application de recollement qui identifie en coordonnées polaires  $i_M(r, \theta)$  à  $i_N(1 - r, \theta)$  pour tout  $0 < r < 1$  et tout  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

Les orientations de  $M \setminus \{i_M(0)\}$  et  $N \setminus \{i_N(0)\}$  se prolongent en une orientation de  $M \sharp N$  puisque l'application de recollement  $(i_N \circ i_M^{-1})|_{i_M(D^n \setminus \{0\})}$  préserve l'orientation.

Attention :

1. La variété  $M \sharp N$  ne dépend pas des choix de  $i_M$  et  $i_N$  à difféomorphisme près, ce qui repose sur un théorème de Palais selon lequel tous les plongements du disque sont isotopes.
2. Par contre  $M \sharp N$  dépend du choix des orientations de  $M$  et  $N$ . Par exemple  $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$  et  $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$  ne sont pas homéomorphes.
3. Si  $M$  ou  $N$  n'est pas orientable, l'opération de somme connexe reste bien définie, on ne suppose alors pas que  $i_M$  ou  $i_N$  préserve ou renverse l'orientation.

**Définition 1.19.** Une variété différentielle à bord  $M$  de dimension  $n$  est définie comme une variété différentielle, mais en étant localement modelée sur des ouverts du demi-espace  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$ . Le bord de  $M$  est l'ensemble des points envoyés sur l'hyperplan  $\{x_n = 0\}$ , il hérite d'une structure de variété différentielle de dimension  $n - 1$ .

### 1.3 Classification des variétés

Il est tentant de chercher à lister toutes les variétés à homéomorphisme ou difféomorphisme près.

**Théorème 1.20.** 1. Toute variété compacte connexe de dimension un est difféomorphe au cercle  $\mathbb{S}^1$ .

2. Toute variété compacte connexe et orientable de dimension deux est difféomorphe à  $\mathbb{S}^2$  ou à une somme connexe  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  de tores, c'est-à-dire à une somme connexe  $\mathbb{S}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ . De plus, deux telles surfaces sont difféomorphes entre elles si et seulement si le nombre de tores dans la somme connexe est le même (c'est le genre de la surface).

3. Toute variété compacte connexe et non orientable de dimension deux est difféomorphe à une somme connexe de plans projectifs  $\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$ . De plus deux telles surfaces sont difféomorphes si et seulement si le nombre de plans projectifs dans la somme connexe est le même.

En dimension supérieure à trois, il devient (très) difficile de montrer que deux variétés sont homéomorphes.

**Théorème 1.21** (G. Perelman). Toute variété compacte connexe et simplement connexe de dimension trois est difféomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^3$ .

**Théorème 1.22** (Markov, 1958). Il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si deux variétés sont homéomorphes entre elles.

D'autres relations d'équivalences plus faibles sont donc étudiées. On peut chercher à lister les variétés à type d'homotopie près ou à cobordisme près. Par exemple,

**Théorème 1.23.** 1. Deux espaces lenticulaires  $L(p, q)$  et  $L(p', q')$  ont même type d'homotopie si et seulement si  $p = p'$  et  $\exists n \in \mathbb{Z}, qq' = \pm n^2 \pmod{p}$ .

2. Ces espaces sont difféomorphes si et seulement si  $p = p'$  et  $q = \pm q'^{\pm 1} \pmod{p}$ .

**Définition 1.24.** Deux variétés compactes orientées  $M$  et  $N$  de dimension  $n$  sont dites cobordantes lorsqu'il existe une variété orientée  $W$ , compacte à bord de dimension  $n + 1$ , dont le bord  $\partial W$  est difféomorphe à la réunion disjointe  $M \sqcup N$  en induisant l'orientation de  $M$  et l'orientation opposée de  $N$ .



*Exemple 1.25.* L'anneau  $\{x \in \mathbb{R}^n, 1 \leq \|x\| \leq 2\}$  est un cobordisme entre  $\mathbb{S}^{n-1}$  et  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

**Théorème 1.26** (R. Thom). *1. Toute variété compacte de dimension trois borde une variété de dimension quatre.*  
*2. Toute variété compacte connexe et orientable de dimension quatre est cobordante à une somme connexe de  $\mathbb{S}^4$  et de copies de  $\mathbb{C}P^2$  et  $\overline{\mathbb{C}P^2}$ . De plus deux telles variétés sont cobordantes si et seulement si le nombre de copies de  $\mathbb{C}P^2$  moins le nombre de copies de  $\overline{\mathbb{C}P^2}$  est le même.*

S'il est très difficile de montrer que deux variétés sont homéomorphes entre elles, il est beaucoup plus facile de montrer qu'elles ne le sont pas. Par exemple, si elles n'ont pas le même nombre de composantes connexes. Le but de ce cours est de fournir des outils algébriques qui permettent de distinguer les variétés ou les espaces topologiques à homéomorphisme près, généralisant la notion de composante connexe.

On va associer à toute variété  $M$  de dimension  $n$  des groupes abéliens  $H_k(M)$  et  $H^k(M)$ ,  $0 \leq k \leq n$ , appelés groupes d'homologie et de cohomologie de  $M$ , de sorte que deux variétés homéomorphes aient des groupes isomorphes. Mieux, toute application  $\mathcal{C}^0$  entre deux variétés induit un morphisme entre leurs groupes d'homologie et de cohomologie, qui est un isomorphisme lorsque l'application est un homéomorphisme.

Un autre objectif du cours aurait pu être d'associer des groupes d'homotopie  $\pi_k(M, pt)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , partageant la même propriété : deux variétés homéomorphes ont des groupes d'homotopie isomorphes et une application  $\mathcal{C}^0$  entre variétés induit un morphisme entre leurs groupes d'homotopies. Le groupe  $\pi_1(M, pt)$  n'est pas abélien en général, c'est le groupe fondamental de la variété. La variété est dite simplement connexe lorsqu'il est trivial. On ne discutera toutefois pas ici cette théorie d'homotopie.

Une manière de formaliser cet objectif passe par les notions de catégorie et foncteur.

**Définition 1.27.** *Une catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée*

- 1. d'une classe  $Ob(\mathcal{C})$  dont les éléments sont appelés objets,*
- 2. pour deux objets  $X$  et  $Y$ , d'un ensemble  $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$  dont les éléments sont appelés morphismes ou flèches de  $X$  à  $Y$ ,*
- 3. pour trois objets  $X, Y$  et  $Z$ , d'une application de composition qui à un morphisme  $f$  de  $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$  et un morphisme  $g$  de  $Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  associe un morphisme  $g \circ f$  de  $Mor_{\mathcal{C}}(X, Z)$*

*tels que*

- a) l'opération de composition est associative, c-à-d  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ ,
- b) si  $X$  est un objet, alors l'ensemble  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$  contient un élément  $\text{Id}_X$  tel que pour tout objet  $Y$  et tout morphisme  $f$  de  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $f \circ \text{Id}_X = \text{Id}_Y \circ f = f$ .

*Exemple 1.28.* La catégorie des ensembles, des espaces topologiques, des variétés, des groupes abéliens, des groupes, etc...

**Définition 1.29.** Un foncteur (covariant)  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  est la donnée d'une application  $\mathcal{F} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$  et pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  d'une application  $\mathcal{F}_{X,Y} : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$  telle que  $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$  pour tous morphismes  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  et  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ , et telle que  $\mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$  pour tout  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

Dans ce langage, le but du cours est de définir des foncteurs de la catégorie des variétés différentielles ou des espaces topologiques vers la catégorie des groupes abéliens.

## 2 Homologie et cohomologie

Ce paragraphe s'inspire du livre [11], que l'on pourra consulter, ainsi que [4], pour en connaître davantage.

### 2.1 Complexes de chaînes et de cochaînes

**Définition 2.1.** *Un complexe de chaînes est la donnée d'une suite*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

où pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $C_n$  est un groupe abélien, ou plus généralement un module sur un anneau  $A$ , et  $\partial_n$  est un morphisme de groupes ou de  $A$ -modules tel que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ .

*Un complexe de cochaînes est la donnée d'une suite*

$$\cdots \xleftarrow{d_{n+1}} C^{n+1} \xleftarrow{d_n} C^n \xleftarrow{d_{n-1}} C^{n-1} \xleftarrow{d_{n-2}} \cdots$$

où pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $C^n$  est un groupe abélien, ou plus généralement un module sur un anneau  $A$ , et  $d_n$  est un morphisme de groupes ou de  $A$ -modules tel que  $d_{n+1} \circ d_n = 0$ .

L'opérateur  $\partial_n$  est appelé opérateur de bord et l'opérateur  $d_n$  opérateur de cobord. Lorsque seul un nombre fini de groupes  $C_n$  ou  $C^n$  sont non triviaux, le complexe est dit borné.

**Exemple 2.2.** 1. Si  $\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$  est un complexe de chaînes, alors en posant  $C^n = \text{Hom}(C_n, \mathbb{Z})$  et  $d^n = {}^t(\partial_{n+1})$ , on obtient un complexe de cochaînes.

2. La suite suivante est un complexe de chaînes :

$$\cdots \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \cdots$$

**Définition 2.3.** Soit  $C$  un complexe de chaînes (respectivement cochaînes). Les éléments de  $\text{Ker}(\partial_n) =: Z_n(C)$  (respectivement  $\text{Ker}(d_n) =: Z^n(C)$ ) sont appelés cycles (respectivement cocycles). Les éléments de  $\text{Im}(\partial_{n+1}) =: B_n(C)$  (respectivement  $\text{Im}(d_{n-1}) =: B^n(C)$ ) sont appelés bords (respectivement cobords) et le quotient  $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$  (respectivement  $H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$ ) est appelé groupe d'homologie (respectivement de cohomologie) du complexe.

**Exemple 2.4.** Dans l'exemple 2 précédent (de l'Exemple 2.2), les groupes d'homologie sont isomorphes à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\{0\}$  en alternance.

Attention : les groupes d'homologie du complexe et de cohomologie du complexe dual ne sont pas isomorphes en général, voir le §2.3.

Dans ce qui suit, les définitions liées aux complexes de chaînes et à leurs groupes d'homologie se reformulent dans le cadre des complexes de cochaînes et de leurs groupes de cohomologie. On le laisse en exercice.

**Définition 2.5.** Une application de chaînes  $f : C \rightarrow D$ , aussi appelée morphisme de complexes, est la donnée pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$  d'un morphisme de groupes ou de  $A$ -modules  $f_n : C_n \rightarrow D_n$  tel que  $f_n \circ \partial_{n+1} = \partial_{n+1} \circ f_{n+1}$ , c-à-d de sorte que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \end{array}$$

**Définition 2.6.** Une homotopie  $h : C \rightarrow D$  entre deux applications de chaînes  $f^1, f^2 : C \rightarrow D$  est la donnée pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$  d'un morphisme de groupes  $h_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$  satisfaisant  $f_n^1 - f_n^2 = \partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n$ .

**Proposition 2.7.** Soit  $f : C \rightarrow D$  une application de chaînes entre complexes. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f_n(Z_n(C)) \subset Z_n(D)$  et  $f_n(B_n(C)) \subset B_n(D)$ , de sorte qu'elle induit un morphisme  $f_n : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ . De plus deux applications homotopes induisent le même morphisme en homologie.

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et pour tout cycle  $c \in Z_n(C)$ , on a  $\partial_n \circ f_n(c) = f_{n-1} \circ \partial_n(c) = f_{n-1}(0) = 0$ , donc  $f_n(c)$  est un cycle. Pour tout bord  $b \in B_n(C)$ , il existe  $a \in C_{n+1}$  tel que  $b = \partial_{n+1}(a)$ , donc  $f_n(b) = f_n \circ \partial_{n+1}(a) = \partial_{n+1} \circ f_{n+1}(a)$ , de sorte que  $f_n(b)$  est un bord. En particulier, si on note  $\pi_n : Z_n(D) \rightarrow H_n(D)$  la surjection canonique, l'application  $\pi_n \circ f_n$  passe au quotient en un morphisme  $H_n(C) \rightarrow H_n(D)$  que l'on note encore  $f_n$ .

Soient  $f^1$  et  $f^2$  deux applications de chaînes homotopes et  $h$  une homotopie entre  $f^1$  et  $f^2$ . Soit alors  $[c] \in H_n(C)$  et  $c' = c + \partial_{n+1}(\tilde{c})$  un représentant quelconque de cette classe d'homologie dans  $Z_n(C)$ . Alors  $c'$  est un cycle donc  $\partial_n(c') = 0$ . En notant  $\tilde{c}' = h_n(c')$ , on a  $f_n^1(c') = f_n^2(c') + \partial_{n+1}(\tilde{c}')$  de sorte que  $f_n^1([c]) = f_n^2([c])$ .  $\square$

**Définition 2.8.** On appelle caractéristique d'Euler d'un complexe borné  $C$  dont les éléments sont des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps  $\mathbb{K}$  la quantité  $\chi(C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_{\mathbb{K}}(C_n)$ .

**Proposition 2.9** (Inégalités de Morse). *Soit  $C$  un complexe de chaînes borné dont les éléments sont des espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps  $\mathbb{K}$ . Alors  $\chi(C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_{\mathbb{K}} H_n(C)$ . De plus, les inégalités de Morse suivantes sont satisfaites :*

$$\forall N \in \mathbb{Z}, \sum_{n \leq N} (-1)^{N-n} \dim_{\mathbb{K}}(C_n) \geq \sum_{n \leq N} (-1)^{N-n} \dim_{\mathbb{K}} H_n(C).$$

*Démonstration.* Soit  $N \in \mathbb{Z}$ . D'après le théorème du rang,

$$\sum_{n \leq N} (-1)^n \dim_{\mathbb{K}} C_n = \sum_{n \leq N} (-1)^n (\dim_{\mathbb{K}} Z_n(C) + \dim_{\mathbb{K}} B_{n-1}(C)).$$

Cette égalité se réécrit

$$\sum_{n \leq N} (-1)^n \dim_{\mathbb{K}} C_n = (-1)^N \dim_{\mathbb{K}} Z_N(C) + \sum_{n \leq N-1} (-1)^n (\dim_{\mathbb{K}} Z_n(C) - \dim_{\mathbb{K}} B_n(C)),$$

ou encore

$$\sum_{n \leq N} (-1)^{N-n} \dim_{\mathbb{K}} C_n = \sum_{n \leq N} (-1)^{N-n} \dim_{\mathbb{K}} H_n(C) + \dim_{\mathbb{K}} B_N(C).$$

Comme la quantité  $\dim_{\mathbb{K}} B_N(C)$  est positive, on en déduit les inégalités de Morse. D'autre part cette quantité s'annule lorsque  $N$  est assez grand, d'où le résultat.  $\square$

## 2.2 Suites exactes de complexes

**Définition 2.10.** *On appelle sous-complexe  $C'$  du complexe  $C$  la donnée, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , d'un sous-groupe  $C'_n$  de  $C_n$  tel que  $\partial_n(C'_n) \subset C'_{n-1}$ . La suite induite*

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C'_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C'_n \xrightarrow{\partial_n} C'_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

*est alors un complexe. Le complexe quotient  $C/C'$  est donné par*

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}/C'_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n/C'_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}/C'_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

**Définition 2.11.** *Une suite courte de complexes  $0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \rightarrow 0$  est dite exacte lorsque pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $i_n$  est injectif,  $p_n$  est surjectif et  $\text{Ker}(p_n) = \text{Im}(i_n)$ .*

*Exemple 2.12.* Si  $C'$  est un sous-complexe de  $C$  et si  $i : C' \rightarrow C$  désigne l'inclusion et  $\pi : C \rightarrow C/C'$  la projection, alors la suite courte de complexes  $0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} C/C' \rightarrow 0$  est exacte.

Un deuxième exemple important est fourni par la proposition suivante.

**Proposition 2.13.** *Soit  $C$  un complexe de chaînes dont les éléments sont des groupe abéliens (ou des  $A$ -modules) libres et soit  $0 \rightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G'' \rightarrow 0$  une suite exacte courte de groupes abéliens (ou de  $A$ -modules). Alors la suite courte de complexes suivante est exacte :*

$$0 \rightarrow C \otimes G' \xrightarrow{Id \otimes i} C \otimes G \xrightarrow{Id \otimes p} C \otimes G'' \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le groupe  $C_n \otimes G''$  est engendré par les éléments de la forme  $c \otimes g''$ , où  $c \in C_n$  et  $g'' \in G''$ . Or il existe  $g \in G$  tel que  $p(g) = g''$ , de sorte que  $Id \otimes p(c \otimes g) = c \otimes g''$ . La dernière partie de la suite est donc exacte. De même l'image de  $Id \otimes i$  est le sous-groupe de  $C_n \otimes G$  engendré par les éléments de la forme  $c \otimes g$ , où  $g \in Ker(p)$ . Soit  $K_n$  ce sous-groupe. Alors, le morphisme  $C_n \otimes G \rightarrow (C_n \otimes G)/K_n$  se factorise à travers  $C_n \otimes G''$  par  $\varphi_n$ , où  $\varphi_n$  agit sur les tenseurs simples par  $\varphi_n(c \otimes g'') = c \otimes g \mod(K_n)$  avec  $g \in G$  tel que  $p(g) = g''$ . Cette application  $\varphi_n$  ne dépend pas du choix de  $g$ . On en déduit que  $Ker(Id \otimes p) \subset K_n$ . D'autre part  $(Id \otimes p) \circ (Id \otimes i) = 0$ , de sorte que  $Ker(Id \otimes p) = Im(Id \otimes i)$ . Enfin, si  $x \in Ker(Id \otimes i)$ , il s'écrit  $x = \sum a_k c_k \otimes g'$ . Le sous-groupe  $C'$  de  $C$  engendré par les  $c_k$  est de type fini et libre donc isomorphe à un  $\mathbb{Z}^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Or  $\mathbb{Z}^r \otimes G' \simeq (G')^r$  et en notant  $\tilde{C} := Im(Id \otimes i)|_{C' \otimes G'}$ , on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C' \otimes G' & \xrightarrow{Id \otimes i} & \tilde{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G')^r & \xrightarrow{i^r} & G^r \end{array}$$

Comme  $i^r$  est injective,  $(Id \otimes i)|_{C' \otimes G'}$  est injective et donc  $x = 0$ . Finalement,  $Id \otimes i$  est injective et la suite est exacte.  $\square$

*Remarque 2.14.* Attention, ce dernier point utilise que  $C$  est libre. Si on considère par exemple la suite  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  de groupes abéliens et le complexe  $C$  de chaînes  $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Alors,  $C \otimes \mathbb{Z} = C$ ,  $C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = C$  et en tensorisant, la multiplication par 2 devient l'application nulle et la projection  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  devient l'identité, donc la suite  $C \otimes \mathbb{Z} \rightarrow C \otimes \mathbb{Z} \rightarrow C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  est exacte, mais la suite  $0 \rightarrow C \otimes \mathbb{Z} \rightarrow C \otimes \mathbb{Z} \rightarrow C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  ne l'est pas, elle n'est pas exacte à gauche.

En fait le défaut d'exactitude provient de la multiplication par 2, codée par la torsion  $G'' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et de la torsion de  $C$ , en l'occurrence sa 2-torsion. On note  $Tor_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, C) = Tor_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  ce défaut d'exactitude, de sorte que la suite  $0 \rightarrow Tor_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, C) \rightarrow C \otimes \mathbb{Z} \rightarrow C \otimes \mathbb{Z} \rightarrow C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  devient exacte.

**Définition 2.15.** *L'homologie du complexe  $C \otimes G$ , où  $G$  est un groupe abélien (ou un  $A$ -module), est appelé homologie de  $C$  à coefficients dans  $G$  et notée  $H_*(C, G)$ .*

*Exemple 2.16.* Si  $C$  est le complexe  $\cdots \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \cdots$ , alors les groupes d'homologie pairs sont donnés par  $H_{2k}(C) = H_{2k}(C, \mathbb{Z}) = 0$  et les groupes d'homologie impairs par  $H_{2k+1}(C) = H_{2k+1}(C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . À coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , on a  $H_k(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  pour tout entier  $k \in \mathbb{Z}$  car le complexe  $C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  s'écrit  $\cdots \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \cdots$ . On s'aperçoit en particulier que  $H_*(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq H_*(C) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , voir le Théorème 2.20.

**Proposition 2.17.** *Soit  $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$  une suite exacte courte de complexes bornés d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps  $\mathbb{K}$ . Alors  $\chi(C) = \chi(C') + \chi(C'')$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du théorème du rang, puisque pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\dim_{\mathbb{K}}(C_n) = \dim_{\mathbb{K}}(C'_n) + \dim_{\mathbb{K}}(C''_n)$ .  $\square$

**Théorème 2.18** (Lemme du serpent). *À toute suite exacte courte de complexes  $0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \rightarrow 0$  est associée une suite exacte longue en homologie :*

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_n(C') \xrightarrow{i_n} H_n(C) \xrightarrow{p_n} H_n(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C') \rightarrow \cdots$$

où  $\partial_*$  est appelé morphisme de connexion.

*Démonstration.* On commence par montrer que la suite est exacte au niveau de  $H_n(C)$ . Soit  $[c] \in H_n(C)$  tel que  $p_n([c]) = 0 = [p_n(c)]$ . Par définition, il existe  $c''$  tel que  $p_n(c) = \partial_{n+1}c''$ . Comme  $p_{n+1}$  est surjective, il existe  $\tilde{c} \in C_{n+1}$  tel que  $c'' = p_{n+1}(\tilde{c})$ , donc  $p_n(c) = \partial_{n+1}c'' = \partial_{n+1} \circ p_{n+1}\tilde{c} = p_n \circ \partial_{n+1}\tilde{c}$  et  $p_n(c - \partial_{n+1}\tilde{c}) = 0$ . Par suite, il existe un unique  $c'$  tel que  $c - \partial_{n+1}\tilde{c} = i_n c'$ . Alors,  $c'$  est un cycle puisque  $i_{n-1}\partial_n c' = \partial_n i_n c' = \partial_n(c - \partial_{n+1}\tilde{c})$  et  $i_{n-1}$  est injective. Donc  $c = i_n(c') \bmod B_n$ , de sorte que  $[c] = i_n([c'])$  et  $\text{Ker}(p_n) \subset \text{Im}(i_n)$ . L'égalité  $\text{Ker}(p_n) = \text{Im}(i_n)$  provient alors du fait que  $p_n \circ i_n = 0$ .

On définit à présent le morphisme de connexion  $\partial_*$ . Soit  $[c''] \in H_n(C'')$ . Il existe  $c \in C_n$  tel que  $p_n(c) = c''$ . Alors,  $p_{n-1}\partial_n c = \partial_n c'' = 0$  de sorte que  $\partial_n c \in \text{Ker}(p_{n-1})$  et il existe un unique  $c' \in C'_{n-1}$  tel que  $\partial_n c = i(c')$ . Cet élément  $c'$  est un cycle car  $i_{n-2}\partial_{n-1}c' = \partial_{n-1}i_{n-1}c' = \partial_{n-1}\partial_n c = 0$  et  $i_{n-2}$  est injective. On définit alors  $\partial_*[c] = [c']$  et on vérifie que cette définition ne dépend pas des choix effectués. Un autre représentant de  $[c'']$  s'écrit en effet  $c'' + \partial_{n+1}\tilde{c}''$ . On a  $\tilde{c}'' = p_{n+1}(\tilde{c})$  et  $p_n(c + \partial_{n+1}\tilde{c}) = c'' + \partial_{n+1}\tilde{c}''$ , de sorte que  $c$  se trouve remplacé par  $c + \partial_{n+1}\tilde{c}$ . D'autre part, un antécédent quelconque de  $c''$  par  $p_n$  s'écrit  $c + i_n\tilde{c}'$ , de sorte que  $c$  est remplacé par  $c + \partial_{n+1}\tilde{c} + i_n\tilde{c}'$ . Alors  $c'$  se trouve remplacé par  $c' + \partial\tilde{c}'$  qui est égal à  $c'$  modulo  $B_{n-1}$ , de sorte que  $[c']$  est en effet indépendant des choix.

Vérifions à présent que la suite est exacte. Soit  $[c''] \in H_n(C'')$  et  $c \in C_n$  tel que  $p_n(c) = c''$ . Si  $c \in Z_n(C)$ , c-à-d si  $[c''] \in \text{Im}(p_n)$ , alors  $\partial_n c = 0$  et donc le  $c'$  du paragraphe précédent est nul et  $\partial_*c'' = 0$ . Ainsi  $\text{Im}(p_n) \subset \text{Ker}(\partial_*)$ .

Maintenant, si  $[c'] = 0$ , alors  $c' = \partial_n \tilde{c}'$  et  $\partial_n c = i_{n-1} c' = \partial_n i_n \tilde{c}'$ . Or on peut choisir  $\tilde{c} = c - i_n \tilde{c}'$  plutôt que  $c$ , et alors  $\partial_n \tilde{c} = 0$  de sorte que  $[c''] \in \text{Im}(p_n)$ . Ainsi,  $\text{Im}(p_n) = \text{Ker}(\partial_*)$ . D'autre part, soit  $[c'] \in \text{Im}(\partial_*)$ . Par définition,  $i_{n-1} c' = \partial_n c$ , de sorte que  $[i_{n-1} c'] = 0 = i_{n-1} [c']$  et donc  $\text{Im}(\partial_*) \subset \text{Ker}(i_{n-1})$ . Puis, si  $[c'] \in \text{Ker}(i_{n-1})$ , alors  $i_{n-1} c' = \partial_n c$  et comme  $\partial_n p_n c = p_{n-1} \partial_n c = p_{n-1} i_{n-1} = 0$ ,  $p_n(c)$  est un cycle et par définition  $\partial_* [p_n c] = [c']$ , de sorte que  $\text{Im}(\partial_*) = \text{Ker}(i_{n-1})$ .  $\square$

**Définition 2.19.** Dans le cas de la suite exacte courte de changements de coefficients donnée par la Proposition 2.13, le morphisme de connexion donné par le Théorème 2.18 est appelé *morphisme de Bockstein*.

### 2.3 Formules des coefficients universels

On a vu dans le cas du complexe  $\cdots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \cdots$  que l'homologie  $H_*(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  diffère de l'homologie  $H_*(C) = H_*(C, \mathbb{Z})$  ou encore de l'homologie tensorisée par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $H_*(C) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

En fait, si  $C$  est un complexe de chaînes et  $G$  un groupe abélien (ou  $A$ -module), on a bien un morphisme de groupes canonique  $\mu : H_*(C) \otimes G \rightarrow H_*(C, G)$  défini sur les tenseurs simples par  $\mu([c] \otimes g) = [c \otimes g]$ . Mais,

**Théorème 2.20** (Formule des coefficients universels en homologie). *Soit  $C$  un complexe de chaînes de groupes abéliens (ou  $A$ -modules) libres et soit  $G$  un groupe abélien (ou  $A$ -module). Alors on a la suite exacte scindée*

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{\mu} H_n(C, G) \rightarrow \text{Tor}_1(H_{n-1}(C), G) \rightarrow 0.$$

Ainsi, l'homologie à coefficients dans un groupe  $G$  contient l'homologie tensorisée mais aussi une partie qui provient de la torsion en degré un de moins.

*Démonstration.* On définit un complexe de chaînes  $Z$  en posant  $Z_n = Z_n(C)$ , le sous-groupe des cycles de degré  $n$  de  $C$  et en posant  $\partial_n = 0$ . De même, on définit le complexe  $B$  en posant  $B_n = B_{n-1}(C)$  et  $\partial_n = 0$ . On obtient ainsi une suite exacte de complexes de chaînes de groupes libres  $0 \rightarrow Z \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 0$ . Comme ces groupes sont libres, la suite est scindée, disons par  $h : B \rightarrow C$ , et on déduit la suite exacte courte  $0 \rightarrow Z \otimes G \rightarrow C \otimes G \rightarrow B \otimes G \rightarrow 0$ . On a alors par scindage  $C \simeq Z \oplus B$  et donc  $C \otimes G \simeq (Z \otimes G) \oplus (B \otimes G)$ . Le Théorème 2.18 fournit la suite exacte longue en homologie

$$\cdots \rightarrow H_{p+1}(B, G) \rightarrow H_p(Z, G) \rightarrow H_p(C, G) \rightarrow H_p(B, G) \rightarrow H_{p-1}(Z, G) \rightarrow \cdots$$

Par définition,  $H_{p+1}(B, G) \simeq B_p(C) \otimes G$  et  $H_p(Z, G) \simeq Z_p(C) \otimes G$ . Puisque  $B_p(C)$  et  $Z_p(C)$  sont libres, la suite exacte

$$0 \rightarrow B_p(C) \rightarrow Z_p(C) \rightarrow H_p(C) \rightarrow 0.$$



induit la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1(H_p(C), G) \rightarrow B_p(C) \otimes G \rightarrow Z_p(C) \otimes G \rightarrow H_p(C) \otimes G \rightarrow 0.$$

On vérifie alors (exercice) que les morphismes  $B_{p-1}(C) \otimes G \rightarrow Z_{p-1}(C) \otimes G$  fournis par les morphismes de connexion de la suite longue sont bien les morphismes  $i_{p-1} \otimes Id$ , où  $i_p : B_p \rightarrow Z_p$  est l'inclusion naturelle. La suite exacte longue se réécrit alors

$$0 \rightarrow H_p(C) \otimes G \rightarrow H_p(C, G) \rightarrow \text{Tor}_1(H_{p-1}(C), G) \rightarrow 0,$$

et on vérifie que le morphisme  $H_p(C) \otimes G \rightarrow H_p(C, G)$  est bien le morphisme  $\mu$  défini précédemment.

Le fait que cette suite exacte soit scindée provient du scindage  $h$  de la suite  $0 \rightarrow Z \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 0$ , qui fournit  $h_p \otimes Id : B_{p-1}(C) \otimes G \rightarrow C_p \otimes G$ . En appliquant la définition du morphisme de connexion, on s'aperçoit que l'image  $(h_p \otimes Id)(\text{Tor}_1(H_{p-1}(C), G))$  est incluse dans le noyau  $\text{Ker}(\partial_p \otimes Id)$ . En composant par la projection  $Z_n(C \otimes G) \rightarrow H_p(C \otimes G)$ , on en déduit le morphisme  $h_p \otimes Id$  de  $\text{Tor}_1(H_{p-1}(C), G)$  dans  $H_p(C, G)$  et ce dernier morphisme scinde la suite, puisque  $(\partial \otimes Id) \circ (h_p \otimes Id) = Id$ .  $\square$

*Exemple 2.21.* Soit  $C$  le complexe  $\dots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \dots$ . Alors  $H_{2p}(C) = 0$  et  $H_{2p+1}(C) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . D'autre part,  $H_p(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . La formule des coefficients universels s'écrit en degré pair :

$$0 \rightarrow H_{2p} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H_{2p}(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Tor}_1(H_{2p-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

soit  $0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Elle s'écrit en degré impair

$$0 \rightarrow H_{2p+1} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H_{2p+1}(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Tor}_1(H_{2p}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

soit  $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$ .

On va à présent comparer l'homologie d'un complexe de chaînes avec la cohomologie du complexe dual. Commençons par un analogue de la Proposition 2.13.

**Proposition 2.22.** Soient  $0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \rightarrow 0$  une suite exacte courte scindée de complexes de chaînes de groupes abéliens (ou  $A$ -modules) et  $G$  un groupe abélien (ou  $A$ -module). Alors la suite courte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C'', G) \xrightarrow{p^*} \text{Hom}(C, G) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}(C', G) \rightarrow 0$$

est exacte et scindée.

*Démonstration.* Cette fois l'hypothèse scindée sert à obtenir l'exactitude à droite. Tout d'abord,  $p^*$  est injective. En effet, soit  $\gamma'' \in \text{Hom}(C'', G)$  tel que  $\gamma'' \circ p = 0$ . Si  $\gamma'' \neq 0$ , il existe  $c'' \in C''$  tel que  $\gamma''(c'') \neq 0$ . Par surjectivité de  $p$ , il existe alors  $c \in C$  tel que  $c'' = p(c)$ . Choisissons un tel  $c$ . Alors,  $\gamma''(c'') = \gamma \circ p(c) = 0$  et donc  $\gamma'' = 0$ . Soit à présent  $\gamma \in \text{Hom}(C, G)$  tel que  $\gamma \circ i = 0$ . Alors,  $\gamma$  passe au quotient en un morphisme  $\gamma'' : C'' \rightarrow G$  tel que  $\gamma = \gamma'' \circ p$ . La suite courte est donc exacte au milieu. Soit enfin  $\gamma' \in \text{Hom}(C', G)$ . On définit  $\gamma \in \text{Hom}(C, G)$  en imposant que  $\gamma|_{\text{Im}(h)} = 0$ , où  $h : C'' \rightarrow C$  est un scindage et  $\gamma \circ i = \gamma'$ . Alors,  $i^*\gamma = \gamma'$  et la suite est également exacte en  $\text{Hom}(C', G)$  et scindée.  $\square$

*Remarque 2.23.* Attention, ce dernier point utilise le fait que la suite est scindée. Si  $C = C' = 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$  et  $C'' = 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  par exemple, la suite exacte courte  $0 \rightarrow C' \xrightarrow{\times 2} C \rightarrow C'' \rightarrow 0$  n'est pas scindée. Alors,  $0 \rightarrow \text{Hom}(C'', \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C', \mathbb{Z})$  est bien exacte, mais pas  $0 \rightarrow \text{Hom}(C'', \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C', \mathbb{Z}) \rightarrow 0$ . On note  $\text{Ext}^1(C'', \mathbb{Z})$  ou  $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  ce défaut de surjectivité de sorte que,

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C'', \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C', \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}^1(C'', \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

est exacte.

*Exercice 2.24.* 1. Montrer que  $\text{Ext}^1(C'', G)$  ne dépend pas de la présentation  $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$ .  
2. Montrer que si  $0 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow C'' \rightarrow 0$  est une suite exacte, et si  $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$  est une présentation de  $C''$ , alors il existe  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \varphi_0 \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & \text{Id} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

De plus, l'image de  $\varphi_0 \in \text{Hom}(C', G)$  dans  $\text{Ext}^1(C'', G)$  ne dépend pas des choix de  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$ .

3. En déduire que  $\text{Ext}^1(C'', G)$  classe les classes d'isomorphismes d'extensions  $0 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow C'' \rightarrow 0$  de  $C''$  par  $G$ .

**Théorème 2.25** (Formule des coefficients universels en cohomologie). *Soient  $C$  un complexe de chaînes de groupes abéliens (ou  $A$ -modules) libres et  $G$  un groupe abélien (ou  $A$ -module). Alors on a la suite exacte scindée*

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{p-1}(C), G) \rightarrow H^p(C, G) \rightarrow \text{Hom}(H_p(C), G) \rightarrow 0.$$

On a noté ici  $H^p(C, G)$  les groupes de cohomologie du complexe dual associé à  $C$ , c-à-d  $H^p(C, G) := H^p(\text{Hom}(C, G))$ . Ainsi, même lorsque  $G = \mathbb{Z}$ , la cohomologie du complexe dual  $\text{Hom}(C, \mathbb{Z})$  diffère en général du dual de l'homologie  $\text{Hom}(H_p(C), \mathbb{Z})$ .

*Démonstration.* On procède comme dans la démonstration du Théorème 2.20. On part de la suite exacte courte  $0 \rightarrow Z \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 0$ , où  $Z_n := Z_n(C)$ ,  $B_n := B_{n-1}(C)$  et  $\partial_n = 0$  pour ces complexes  $Z$  et  $B$ . Comme  $C$  est libre,  $Z$  et  $B$  le sont également et cette suite est scindée. On applique alors la Proposition 2.22 pour en déduire la suite exacte courte, scindée par  $h$ , de complexes

$$0 \rightarrow \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(C, G) \rightarrow \text{Hom}(Z, G) \rightarrow 0.$$

Puis on en déduit la suite exacte longue associée en cohomologie

$$\cdots \rightarrow H^{p-1}(Z, G) \xrightarrow{d^*} H^p(B, G) \rightarrow H^p(C, G) \rightarrow H^p(Z, G) \xrightarrow{d^*} H^{p+1}(B, G) \rightarrow \cdots,$$

où  $d^*$  désigne l'opérateur de connexion. Or les différentielles de  $Z$  et  $B$  sont triviales, donc  $H^p(Z, G) = \text{Hom}(Z_p, G)$  et  $H^p(B, G) = \text{Hom}(B_{p-1}, G)$ . On vérifie alors (exercice) que  $d^*$  est le morphisme associé à la suite exacte  $0 \rightarrow B_p(C) \rightarrow Z_p(C) \rightarrow H_p(C) \rightarrow 0$  de laquelle on déduit la suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}(H_p(C), G) \rightarrow \text{Hom}(Z_p(C), G) \xrightarrow{d^*} \text{Hom}(B_p(C), G) \rightarrow \text{Ext}^1(H_p(C), G) \rightarrow 0,$$

puisque  $Z_p(C)$  et  $B_p(C)$  sont libres. La suite exacte longue se réécrit donc

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{p-1}(C), G) \rightarrow H^p(C, G) \rightarrow \text{Hom}(H_p(C), G) \rightarrow 0.$$

Il reste à voir que cette suite est scindée, ce qui découle de la définition de  $d^*$  et du scindage  $h$  de la suite  $0 \rightarrow \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(C, G) \rightarrow \text{Hom}(Z, G) \rightarrow 0$ . En effet, soit  $\gamma \in \text{Hom}(H_p(C), G)$ . Alors  $h(\gamma) \in \text{Hom}(C_p, G)$  et de plus,  $h(\gamma)$  est un cocycle puisque  $d^p(h(\gamma)) = h(\gamma) \circ \partial_{p+1} = 0$ . Ainsi, par composition avec la projection  $Z^p(C, G) \rightarrow H^p(C, G)$ ,  $h$  induit un morphisme  $\text{Hom}(H_p(C), G) \rightarrow H^p(C, G)$  qui scinde la suite puisque  $i^* \circ h = \text{Id}_{\text{Hom}(Z_p(C), G)}$ .  $\square$

*Exemple 2.26.* Soit  $C$  le complexe  $\cdots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \cdots$ . Alors le complexe dual est donné par  $\cdots \xleftarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xleftarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\times 2} \cdots$ . On a  $H_{2p}(C) = 0$ ,  $H_{2p+1}(C) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $H^{2p}(C) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $H^{2p+1}(C) = 0$ . La formule des coefficients universels se lit alors en degré pair

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{2p-1}(C), \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2p}(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_{2p}(C), \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

ce qui se réécrit  $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$ , et en degré impair

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{2p}(C), \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2p+1}(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_{2p+1}(C), \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

ce qui se réécrit  $0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$ .

**Définition 2.27.** Si  $C$  est un complexe de chaînes et  $G$  un groupe abélien, alors la cohomologie du complexe  $\text{Hom}(C, G)$  est appelée cohomologie de  $C$  à coefficients dans  $G$  et noté  $H^*(C, G)$ .

*Exercice 2.28.* Montrer que si  $C$  est un complexe de chaînes de groupes libres, alors  $\text{Hom}(C, G) = \text{Hom}(C, \mathbb{Z}) \otimes G$ .

*Remarque 2.29.* La démonstration du Théorème 2.25 utilise l'analogie du Théorème 2.18 en cohomologie, à savoir

**Théorème 2.1'.** À toute suite exacte courte de complexes de cochaînes

$$0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$$

est associée une suite exacte longue en cohomologie

$$\dots \rightarrow H^{p-1}(C'') \xrightarrow{\delta^*} H^p(C') \rightarrow H^p(C) \rightarrow H^p(C'') \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(C') \rightarrow \dots,$$

où  $\delta^*$  est appelé morphisme de connexion.

L'analogie du Théorème 2.20 s'écrit alors

**Théorème 2.2'.** Soit  $C$  un complexe de cochaînes dont les éléments sont des groupes abéliens (ou  $A$ -modules) libres et soit  $G$  un groupe (ou  $A$ -module). Alors on a la suite exacte scindée

$$0 \rightarrow H^p(C) \otimes G \rightarrow H^p(C \otimes G) \rightarrow \text{Tor}_1(H^{p+1}(C), G) \rightarrow 0.$$

*Exercice 2.30.* 1. Montrer que pour tout groupe  $G$ ,  $\mathbb{Z} \otimes G \simeq G \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ , puis que  $\text{Tor}_1(\mathbb{Z}, G) = 0 = \text{Ext}^1(\mathbb{Z}, G)$ . Montrer également que

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes G \simeq G/mG \simeq \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G),$$

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) \simeq \text{Ker}(G \xrightarrow{\times m} G) \simeq \text{Tor}_1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G).$$

2. En déduire que si  $d = \text{pgcd}(m, n)$ , alors

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}),$$

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq 0 \simeq \text{Tor}_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}),$$

$$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \text{Tor}_1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

## 3 Exemples en géométrie

### 3.1 Cohomologie de de Rham

Ce paragraphe est très largement inspiré du premier chapitre de [1].

#### 3.1.1 Définitions

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ . Pour tout entier  $p$  compris entre 0 et  $n$ , on note  $\Omega^p(M, \mathbb{R})$  l'espace des formes  $p$ -linéaires lisses de  $M$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et  $\Omega_c^p(M, \mathbb{R})$  le sous-espace des  $p$ -formes à supports compacts.

On note  $d : \Omega^p(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{p+1}(M, \mathbb{R})$  la différentielle extérieure, de sorte que si localement  $\omega(x) = \sum_{|I|=p} a_I(x) dx_I$ , alors  $d\omega(x) = \sum_{|I|=p} \left( \sum_j \frac{\partial a_I(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \right)$ .

Si  $\omega$  est à support compact,  $d\omega$  l'est également et on obtient  $d : \Omega_c^p(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{p+1}(M, \mathbb{R})$ .

**Proposition 3.1.** *La différentielle extérieure satisfait  $d^2 = 0$ .*

*Démonstration.* Localement,  $d^2\omega = \sum_{|I|=p,k,j} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_I$ . Le résultat provient donc des relations  $dx_k \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_k$  et  $\frac{\partial^2 a_I}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_k}$ .  $\square$

**Définition 3.2.** *Le complexe*

$$0 \rightarrow \Omega^0(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M, \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

*est appelé complexe de de Rham. Ses cocycles sont appelés formes fermées, ses cobords formes exactes et sa cohomologie cohomologie de de Rham. On la note  $H^*(M, \mathbb{R})$ . La cohomologie du complexe à support compact est notée  $H_c^*(M, \mathbb{R})$ . Si  $p \notin \{0, \dots, n\}$ ,  $\Omega^p(M, \mathbb{R}) = H^p(M, \mathbb{R}) = \{0\}$ .*

**Proposition 3.3.** *1. Pour toute variété différentielle  $M$ ,  $H^0(M, \mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension le nombre de composantes connexes de  $M$ .*

*2. Si  $M$  est compacte et orientable de dimension  $n$ , alors  $H^n(M, \mathbb{R})$  est non trivial.*

*3. La cohomologie du cercle  $\mathbb{S}^1$  satisfait  $H^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \simeq H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Commençons par le premier point. Soit  $f$  une 0-forme, c-à-d une fonction. Elle est fermée si et seulement si sa différentielle est nulle, c-à-d si et seulement si elle est localement constante et donc constante sur chaque composante connexe. Réciproquement, toutes ces fonctions localement constantes sont fermées et seule 0 est exacte, donc  $H^0(M, \mathbb{R})$  a pour dimension le nombre de composantes connexes de  $M$ .

Pour le deuxième point, si  $M$  est compacte et orientable, alors l'intégration de ses  $n$ -formes fournit un morphisme  $\Omega^n(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  qui passe au quotient en  $\int_M : H^n(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  d'après la formule de Stokes. Par hypothèse, il existe une forme volume  $\alpha$  qui définit l'orientation de  $M$  et ne s'annule donc pas. Par suite,  $\int_M \alpha > 0$ , d'où le résultat.

Enfin, en ce qui concerne le cercle, l'isomorphisme  $H^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$  résulte du premier point. Puis, l'intégration sur  $\mathbb{S}^1$  fournit d'après le deuxième point un morphisme surjectif  $[\alpha] \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{S}^1} \alpha \in \mathbb{R}$ . Ce morphisme est injectif. En effet, si  $\alpha$  est telle que  $\int_{\mathbb{S}^1} \alpha = 0$ , on écrit  $\alpha = f(\theta)d\theta$  où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $2\pi$ -périodique, et on pose  $F(t) = \int_0^t f(\theta)d\theta$ . Par hypothèse,  $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0$ , ce qui entraîne que  $F$  est  $2\pi$ -périodique. Cette fonction  $F$  passe au quotient en une fonction sur le cercle telle que  $\alpha = dF$ , d'où le résultat par Stokes.  $\square$

À ce stade, on a associé des groupes de cohomologie à toute variété différentielle. Si  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme entre ces variétés, alors le tiré en arrière des formes fournit un morphisme  $f^* : \Omega^p(M_2, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^p(M_1, \mathbb{R})$  qui satisfait  $d \circ f^* = f^* \circ d$ . Il passe donc au quotient en un morphisme  $f^* : H^p(M_2, \mathbb{R}) \rightarrow H^p(M_1, \mathbb{R})$ , d'après la Proposition 2.7.

**Théorème 3.4.** *Toute application  $\mathcal{C}^\infty$  entre variétés différentielles  $f : M_1 \rightarrow M_2$  induit un morphisme de complexes  $f^*$  et deux applications homotopes par une homotopie lisse induisent des morphismes de complexes homotopes.*

*Démonstration.* La relation  $f^* \circ d = d \circ f^*$  signifie par définition que  $f^*$  est un morphisme de complexes.

Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux applications homotopes et  $F$  une homotopie lisse entre  $f_1$  et  $f_2$ . Si  $\alpha \in \Omega^p(M_2, \mathbb{R})$ , alors son tiré en arrière par l'homotopie est une  $p$ -forme de  $M_1 \times [0, 1]$ . Cette forme  $F^*\alpha$  s'écrit de manière unique  $\omega_1(x, t) + dt \wedge \omega_2(x, t)$ , où  $\omega_1$  est une  $p$ -forme et  $\omega_2$  une  $(p-1)$ -forme qui ne font intervenir que des facteurs  $dx_i$  et pas le facteur  $dt$ .

On pose alors  $h^p(\alpha) = \int_0^1 \omega_2(x, t)dt$ . La différentielle extérieure sur  $M_1 \times [0, 1]$  s'écrit  $d\omega = d_1\omega + dt \wedge \frac{\partial \omega}{\partial t}$ , où  $d_1$  est la différentielle selon  $M_1$ . Comme  $h^p(\alpha)$  ne dépend plus de  $t$ , on a  $dh^p(\alpha) = d_1 \left( \int_0^1 \omega_2(x, t)dt \right)$  et par dérivation sous le signe intégral, on obtient  $dh^p(\alpha) = \int_0^1 d_1\omega_2(x, t)dt$ . Par ailleurs, on a  $F^*d\alpha = dF^*\alpha =$

$d(\omega_1 + dt \wedge \omega_2)$ , soit  $F^*d\alpha = d_1\omega_1 + dt \wedge (\frac{\partial\omega_1}{\partial t} - d_1\omega_2)$ , de sorte que  $h^{p+1}(d\alpha) = \int_0^1 (\frac{\partial\omega_1}{\partial t} - d_1\omega_2)dt$  par définition. Ainsi,  $h^{p+1}(d\alpha) = \omega_1(x, 1) - \omega_1(x, 0) - dh^p(\alpha)$ . Or, en notant

$$\begin{aligned} i_{t_0} : M_1 &\rightarrow M_1 \times [0, 1] \\ x &\mapsto (x, t_0), \end{aligned}$$

on s'aperçoit que  $\omega_1(x, t_0) = i_{t_0}^* F^* \alpha = (F \circ i_{t_0})^* \alpha = f_{t_0}^* \alpha$ . On en déduit finalement que  $h^p(d\alpha) = f_2^* \alpha - f_1^* \alpha - dh^p(\alpha)$ .  $\square$

**Corollaire 3.5** (Lemme de Poincaré). *1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $H^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq H^p(pt, \mathbb{R})$  est nul et  $H^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ .*

*2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}) \simeq H^*(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^0$  l'application constante et  $g : 0 \in \mathbb{R}^0 \mapsto 0 \in \mathbb{R}^n$ . Alors,  $f \circ g$  vaut l'identité de  $\mathbb{R}^0$  et  $g \circ f$  est homotope à l'identité de  $\mathbb{R}^n$  (exercice, cf l'Exemple 1.10). D'après le Théorème 3.4 et la Proposition 2.7,  $f^* : H^p(\mathbb{R}^0, \mathbb{R}) \rightarrow H^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  est un isomorphisme. De même, l'inclusion  $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est une équivalence d'homotopie (exercice, cf l'Exemple 1.10) et le résultat découle donc à nouveau du Théorème 3.4.  $\square$

**Proposition 3.6** (Lemme de Poincaré à support compact). *Pour toute variété différentielle  $M$  et tout entier  $p$ ,  $H_c^{p+1}(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \simeq H_c^p(M, \mathbb{R})$ . En particulier, si  $p \neq n$ ,  $H_c^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{0\}$  et  $H_c^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Soit  $dt$  la 1-forme standard de  $\mathbb{R}$  et  $e : t \in \mathbb{R} \mapsto e(t) \in \mathbb{R}$  une fonction positive à support compact et d'intégrale 1. La 1-forme  $e(t)dt$  est fermée et à support compact sur  $\mathbb{R}$ . Si  $\omega$  est une  $p$ -forme à support compact sur  $M \times \mathbb{R}$ ,  $\omega$  s'écrit de manière unique  $f(x, t)\alpha(x) + dt \wedge g(x, t)\beta(x)$ , où  $f$  et  $g$  sont des fonctions à support compact,  $\alpha$  une  $p$ -forme et  $\beta$  une  $(p-1)$ -forme sur  $M$ . On pose

$$\begin{aligned} e_* : \Omega_c^p(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \Omega_c^{p+1}(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \omega &\mapsto (e(t)dt) \wedge \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_* : \Omega_c^{p+1}(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) &\rightarrow \Omega_c^p(M, \mathbb{R}) \\ f(x, t)\alpha(x) + dt \wedge g(x, t)\beta &\mapsto \left( \int_{\mathbb{R}} g(x, t)dt \right) \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K : \Omega_c^{p+1}(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) &\rightarrow \Omega_c^p(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f(x, t)\alpha(x) + dt \wedge g(x, t)\beta &\mapsto \left( \int_{-\infty}^t g(x, u)du - \int_{\mathbb{R}} g(x, u)du \times \int_{-\infty}^t e(u)du \right) \beta \end{aligned}$$

Alors on vérifie que  $\pi_*$  et  $e_*$  sont des applications de cochaînes, et qu'on a les égalités  $\pi_* \circ e_* = Id$  et  $Id - e_* \circ \pi_* = (-1)^q(dK - Kd)$  (voir la Proposition 4.6 de [1] pour davantage de détails).  $\square$

*Remarque 3.7.* En particulier, la cohomologie de de Rham à support compact n'est pas invariante par équivalence d'homotopie lisse, seulement par difféomorphisme.

### 3.1.2 Suites de Mayer-Vietoris

Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de la variété  $M$  qui recouvrent  $M$ . Il est possible de comparer la cohomologie de de Rham de  $M$  avec celles de  $U$ ,  $V$  et de  $U \cap V$ . En effet, l'opération de restriction d'une forme de  $M$  à  $U$  et  $V$  fournit un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(M, \mathbb{R}) & \rightarrow & \Omega^*(U, \mathbb{R}) \oplus \Omega^*(V, \mathbb{R}) \\ \alpha & \mapsto & (\alpha|_U, \alpha|_V) \end{array}.$$

De même, la restriction à  $U \cap V$  fournit

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(U, \mathbb{R}) \oplus \Omega^*(V, \mathbb{R}) & \rightarrow & \Omega^*(U \cap V, \mathbb{R}) \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha|_{U \cap V} - \beta|_{U \cap V}. \end{array}$$

**Théorème 3.8.** *Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $M$  tels que  $M = U \cup V$ . Alors la suite courte de Mayer-Vietoris*

$$0 \rightarrow \Omega^*(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^*(U, \mathbb{R}) \oplus \Omega^*(V, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^*(U \cap V, \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

*est exacte.*

On déduit donc du Théorème 3.8 la suite longue en cohomologie

$$\dots \rightarrow H^{p-1}(U \cap V) \rightarrow H^p(M) \rightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \rightarrow H^p(U \cap V) \rightarrow H^{p+1}(M) \rightarrow \dots$$

*Démonstration.* Si  $\alpha \in \Omega^*(M, \mathbb{R})$  est telle que  $\alpha|_U = \alpha|_V = 0$ , alors  $\alpha = 0$ .

De même, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux formes respectivement sur  $U$  et  $V$ , et telles que  $\alpha|_{U \cap V} = \beta|_{U \cap V}$ , alors  $\alpha$  et  $\beta$  coïncident sur  $U \cap V$  et se recollent donc en une forme  $\gamma$  telle que  $\gamma|_U = \alpha$  et  $\gamma|_V = \beta$ . Par ailleurs, si on restreint une forme  $\gamma$  à  $U$  et  $V$ , la différence des deux formes obtenues sur  $U \cap V$  est nulle. Ainsi il n'y a que la surjectivité à prouver, c-à-d l'exactitude à droite.

Soit donc  $\gamma$  une forme sur  $U \cap V$  et soit  $(f_U, f_V)$  une partition de l'unité de classe  $C^\infty$  associée au recouvrement  $(U, V)$ . On pose  $\alpha = f_V \gamma$  que l'on peut prolonger par 0 sur  $U$  pour obtenir une forme sur  $U$ . De même, on peut prolonger  $\beta = -f_U \gamma$  par 0 sur  $V$  pour obtenir une forme sur  $V$ . Alors  $\alpha - \beta = \gamma$  sur  $U \cap V$ , d'où la surjectivité.  $\square$

**Corollaire 3.9.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H^p(\mathbb{S}^n, \mathbb{R})$  est nul si  $p$  est différent de 0 ou  $n$  et  $H^0(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \simeq H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ .*



*Démonstration.* Si  $n = 1$ , c'est la Proposition 3.3. Si  $n > 1$ , on choisit deux points distincts  $N$  et  $S$  et on pose  $U = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$  et  $V = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ . La suite exacte longue de Mayer-Vietoris fournit

$$\dots \rightarrow H^{p-1}(U) \oplus H^{p-1}(V) \rightarrow H^{p-1}(U \cap V, \mathbb{R}) \rightarrow H^p(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \rightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \rightarrow \dots$$

Or  $U \cong V \cong \mathbb{R}^n$  et  $U \cap V$  a le type d'homotopie de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . D'après le Corollaire 3.5,  $H^p(U \cap V, \mathbb{R}) \simeq H^p(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R})$  et  $H^p(U) \oplus H^p(V) = 0$  dès que  $p > 1$ . On en déduit que pour tout  $p > 1$ ,  $H^{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}) \simeq H^p(\mathbb{S}^n, \mathbb{R})$  et donc par récurrence que  $H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$  et  $H^p(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \simeq 0$  si  $p > 1$ ,  $p \neq n$ . Par ailleurs,  $H^0(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$  d'après la Proposition 3.3 puisque  $\mathbb{S}^n$  est connexe. Enfin, le début de la suite de Mayer-Vietoris s'écrit

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow H^0(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \rightarrow H^1(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

et l'application  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est surjective, de sorte que  $H^1(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) = 0$ . □

**Corollaire 3.10.** *La cohomologie de de Rham d'une variété compacte est de dimension finie. Plus généralement, c'est vrai pour une variété  $M$  possédant un recouvrement fini d'ouverts dont toutes les intersections sont soit vides soit difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ .*

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur le nombre  $m$  d'ouverts du recouvrement de  $M$ .

Le cas  $m = 1$  est donné par le Corollaire 3.5, puisqu'alors  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$  et que  $H^p(M)$  est invariant par difféomorphisme.

À présent, si  $M = \bigcup_{i=1}^{m+1} U_i$ , on note  $U = \bigcup_{i=1}^m U_i$  de sorte que  $M = U \cup U_{m+1}$ . Par hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour  $U$  et pour  $U \cap U_{m+1}$ , puisque  $U \cap U_{m+1} = \bigcup_{i=1}^m U_i \cap U_{m+1}$ . Il est vrai aussi pour  $U_{m+1}$  qui est difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . Le résultat découle donc de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris associée au recouvrement  $M = U \cup U_{m+1}$ , d'après le théorème du rang.

Enfin, toute variété compacte possède un recouvrement vérifiant les hypothèses du corollaire, voir le Corollaire 3.42. □

**Définition 3.11.** *On appelle  $i$ -ème nombre de Betti de  $M$  la dimension  $b^i(M) = \dim H^i(M, \mathbb{R})$ .*

Considérons à présent la cohomologie à support compact. On n'a plus d'application

$$\begin{array}{ccc} \Omega_c^*(M, \mathbb{R}) & \rightarrow & \Omega_c^*(U, \mathbb{R}) \oplus \Omega_c^*(V, \mathbb{R}) \\ \alpha & \mapsto & (\alpha|_U, \alpha|_V) \end{array}$$

car être à support compact dans  $M$  n'implique pas d'être à support compact dans  $U$  ou dans  $V$ . Par contre, on peut définir l'injection

$$\begin{array}{ccc} \Omega_c^*(U \cap V, \mathbb{R}) & \rightarrow & \Omega_c^*(U, \mathbb{R}) \oplus \Omega_c^*(V, \mathbb{R}) \\ \alpha & \mapsto & (\alpha, -\alpha) \end{array}$$

où l'on prolonge  $\alpha$  par 0 sur  $U$  et  $V$ , puisqu'elle est à support compact dans  $U \cap V$ .  
On définit également

$$\begin{array}{ccc} \Omega_c^*(U, \mathbb{R}) \oplus \Omega_c^*(V, \mathbb{R}) & \rightarrow & \Omega_c^*(M, \mathbb{R}) \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha + \beta \end{array}$$

**Proposition 3.12.** *La suite courte*

$$0 \rightarrow \Omega_c^*(U \cap V, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^*(U, \mathbb{R}) \oplus \Omega_c^*(V, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^*(M, \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

*est exacte.*

*Démonstration.* L'injectivité et l'exactitude au milieu sont claires, puisque si  $\alpha + \beta = 0$ ,  $\alpha = -\beta$  et donc  $\text{supp}(\beta) = \text{supp}(\alpha) \cap \text{supp}(\beta) \subset U \cap V$ . Pour ce qui est de la surjectivité, si  $\gamma$  est une forme sur  $M$  à support compact, et que  $(f_U, f_V)$  est une partition de l'unité de classe  $C^\infty$  associée à  $(U, V)$ , alors  $f_U\gamma + f_V\gamma = \gamma$  et comme  $\gamma$  est à support compact,  $f_U\gamma$  et  $f_V\gamma$  le sont également, dans  $U$  et dans  $V$  respectivement.  $\square$

On en déduit la suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \rightarrow H_c^p(M) \rightarrow H_c^{p+1}(U \cap V) \rightarrow H_c^{p+1}(U) \oplus H_c^{p+1}(V) \rightarrow H_c^{p+1}(M) \rightarrow \cdots$$

Définissons à présent le degré d'une application de la sphère dans elle-même. Soit donc  $f$  une application  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{S}^n$  dans  $\mathbb{S}^n$ . Alors  $f$  induit un morphisme  $f^* : H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \rightarrow H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{R})$ . Comme  $H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ ,  $f^*$  est donnée par la multiplication par un scalaire que l'on appelle degré de  $f$  et qu'on note  $\deg(f)$ .

**Proposition 3.13.** *Si  $f$  n'est pas surjective, alors  $\deg(f) = 0$  et ce degré  $\deg(f)$  est toujours entier.*

*Démonstration.* D'après le lemme de Sard,  $f$  possède une valeur régulière  $x \in \mathbb{S}^n$ . Alors par inversion locale, la préimage de  $x$  est un ensemble discret et donc fini de  $\mathbb{S}^n$ , par compacité. On note  $f^{-1}(x) = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $U$  un voisinage de  $x$  tel que  $f^{-1}(U)$  soit une réunion  $\bigsqcup_{i=1}^n U_i$  où  $U_i$  est un voisinage de  $x_i$  et  $f|_{U_i} : U_i \rightarrow U$  est un difféomorphisme. Munissons  $\mathbb{S}^n$  d'une orientation définie par une forme volume  $\omega$ . On associe  $\pm 1$  à  $x_i$  selon que  $f|_{U_i}$  préserve ou renverse l'orientation et on note cet indice  $\deg_{\text{loc}}(f, x_i)$ .

On dispose d'un isomorphisme  $H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  donné par l'intégration des  $n$ -formes  $[\alpha] \rightarrow \int_{\mathbb{S}^n} \alpha$ , voir le Corollaire 3.9 et la Proposition 3.3. Soit  $s$  une fonction  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et à support dans  $U$ , telle que  $\int_{\mathbb{S}^n} (s\omega) > 0$ . Alors,

$$\int_{\mathbb{S}^n} f^*(s\omega) = \deg(f) \int_U (s\omega) = \sum_{i=1}^n \int_{f(U_i)} (s\omega) \times \deg_{\text{loc}}(f, x_i) = \sum_{i=1}^n \deg_{\text{loc}}(f, x_i) \int_U (s\omega),$$

puisque  $\deg_{\text{loc}}(f, x_i)$  est le signe du jacobien de  $f$  en  $x_i$ .

Ainsi,  $\deg(f) = \sum_{i=1}^n \deg_{\text{loc}}(f, x_i)$ , de sorte que  $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ . Si  $f$  n'est pas surjective, il existe une valeur régulière  $y$  de  $f$  qui n'est pas dans l'image de  $f$ . En appliquant le calcul précédent, on obtient  $\deg(f) = 0$ .  $\square$

*Exemple 3.14.* • L'application  $f : z \in \mathbb{S}^1 \mapsto z^k \in \mathbb{S}^1$  est de degré  $k$ .

• L'application  $f : [z_0 : z_1] \in \mathbb{CP}^1 \mapsto [z_0^k, z_1^k] \in \mathbb{CP}^1$  est de degré  $k$ . C'est un revêtement ramifié à  $k$  feuillets.

### 3.1.3 Dualité de Poincaré, première version

**Proposition 3.15.** *Le produit extérieur  $\wedge$  induit un produit en cohomologie qu'on appelle cup produit. Plus précisément, on a*

$$\begin{aligned} H^p(M) \times H^q(M) &\xrightarrow{\wedge} H^{p+q}(M) \\ H^p(M) \times H_c^q(M) &\xrightarrow{\wedge} H_c^{p+q}(M) \\ H_c^p(M) \times H_c^q(M) &\xrightarrow{\wedge} H_c^{p+q}(M) \end{aligned}$$

*Démonstration.* On rappelle que  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$ . Ainsi, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont fermées,  $\alpha \wedge \beta$  l'est également. De même, si  $\alpha = d\alpha'$  est exacte et  $\beta$  fermée, alors  $\alpha \wedge \beta = d(\alpha' \wedge \beta)$  est exacte. Il en est de même si  $\alpha$  est fermée et  $\beta$  exacte, de sorte que la classe de cohomologie du produit ne dépend que de la classe de cohomologie des formes. Enfin, si l'une des deux formes est à support compact, alors le produit extérieur l'est également. D'où le résultat.  $\square$

La Proposition 3.15 signifie que  $H^*(M) = \bigoplus_{p=0}^{\dim(M)} H^p(M)$  est un anneau et même une  $\mathbb{R}$ -algèbre graduée. L'élément neutre est la fonction constante égale à 1 et cette algèbre est commutative graduée, de sorte que  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{(\deg \alpha)(\deg \beta)} \beta \wedge \alpha$ .

On déduit également de la Proposition 3.15, lorsque  $M$  est orientée, la forme bilinéaire suivante

$$\begin{aligned} H^p(M) \times H_c^{n-p}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

**Théorème 3.16** (Dualité de Poincaré). *Soit  $M$  une variété compacte et orientée. Alors, la forme bilinéaire*

$$\begin{aligned} H^p(M) \times H_c^{n-p}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

*est non dégénérée. C'est également le cas lorsque  $M$  est orientée et possède un recouvrement par un nombre fini d'ouverts dont toutes les intersections sont vides ou difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ .*

**Corollaire 3.17.** *Si  $M$  vérifie les hypothèses du Théorème 3.16, alors on a l'isomorphisme  $H^p(M) \simeq H_c^{n-p}(M)$ .*

*Démonstration.* En fait on a un isomorphisme  $H^p(M) \simeq (H_c^{n-p}(M))^*$ . En effet les applications linéaires

$$\begin{aligned} H^p(M) &\rightarrow (H_c^{n-p}(M))^* \\ [\alpha] &\mapsto ([\beta] \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_c^{n-p}(M) &\rightarrow (H^p(M))^* \\ [\beta] &\mapsto ([\alpha] \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

sont injectives d'après le Théorème 3.16, donc on a égalité des dimensions et elles sont bijectives.  $\square$

On va utiliser dans la démonstration du Théorème 3.16 le lemme des cinq isomorphismes suivant.

**Lemme 3.18** (Lemme des cinq). *Si l'on a deux suites exactes  $\cdots \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow \cdots$  et  $\cdots \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow D' \rightarrow E' \rightarrow \cdots$ , ainsi qu'un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon & & \\ \cdots & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

*et si  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  et  $\epsilon$  sont des isomorphismes, alors  $\gamma$  est un isomorphisme.*

**Exercice 3.19.** Démontrer le Lemme des cinq isomorphismes. Montrer qu'en fait, la surjectivité de  $\alpha$  et l'injectivité de  $\beta$  et  $\delta$  entraînent l'injectivité de  $\gamma$  tandis que la surjectivité de  $\beta$  et  $\delta$  et l'injectivité de  $\epsilon$  entraînent la surjectivité de  $\gamma$ , ce qui fournit un résultat un peu plus fort que celui énoncé.

*Démonstration du Théorème 3.16.* Il suffit de démontrer la deuxième partie du théorème, puisqu'une variété compacte possède un tel recouvrement, d'après le Corollaire 3.42. On procède par récurrence sur le nombre  $m$  d'ouverts du recouvrement de  $M$  comme dans la démonstration du Corollaire 3.10.

Si  $m = 1$ , alors  $H^p(\mathbb{R}^n)$  est nul pour  $p \neq 0$  et de dimension 1 pour  $p = 0$  d'après le Corollaire 3.5. De même, d'après la Proposition 3.6,  $H_c^p(\mathbb{R}^n)$  est nul pour  $p \neq n$  et de dimension 1 pour  $p = n$ . Il n'y a donc que le cas  $p = 0$  à considérer. La fonction constante égale à 1 engendre  $H^0(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $s$  une fonction à support compact et positive et soit  $\omega$  la forme volume standard de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\int_{\mathbb{R}^n} 1 \wedge s\omega > 0$ , ce qui implique le résultat lorsque  $p = 0$ , puisque  $s\omega$  engendre  $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ .

Si  $m = 2$ , on écrit  $M = U \cup V$  où  $U$ ,  $V$  et  $U \cap V$  qui vérifient l'hypothèse de récurrence. Les deux suites de Mayer-Vietoris s'écrivent

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{p-1}(U) \oplus H^{p-1}(V) \rightarrow H^{p-1}(U \cap V) \rightarrow H^p(M) \rightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \rightarrow H^p(U \cap V) \rightarrow \dots \\ \dots \leftarrow H_c^{n-p+1}(U) \oplus H_c^{n-p+1}(V) \leftarrow H_c^{n-p+1}(U \cap V) \leftarrow H_c^{n-p}(M) \leftarrow H_c^{n-p}(U) \oplus H_c^{n-p}(V) \leftarrow H_c^{n-p}(U \cap V) \leftarrow \dots \end{aligned}$$

On réécrit la deuxième suite

$$\dots \rightarrow H_c^{n-p+1}(U)^* \oplus H_c^{n-p+1}(V)^* \rightarrow H_c^{n-p+1}(U \cap V)^* \rightarrow H_c^{n-p}(M)^* \rightarrow H_c^{n-p}(U)^* \oplus H_c^{n-p}(V)^* \rightarrow H_c^{n-p}(U \cap V)^* \rightarrow \dots$$

Par hypothèse de récurrence, les quatre morphismes

$$\begin{aligned} H^{p-1}(U) \oplus H^{p-1}(V) &\rightarrow H_c^{n-p+1}(U)^* \oplus H_c^{n-p+1}(V)^*, \\ H^{p-1}(U \cap V) &\rightarrow H_c^{n-p+1}(U \cap V)^*, \\ H^p(U) \oplus H^p(V) &\rightarrow H_c^{n-p}(U)^* \oplus H_c^{n-p}(V)^* \end{aligned}$$

et

$$H^p(U \cap V) \rightarrow H_c^{n-p}(U \cap V)^*$$

donnés par la forme bilinéaire  $([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$ , sont des isomorphismes. Il suffit alors de montrer que le diagramme est commutatif pour conclure par le lemme des cinq isomorphismes. Dans le cas du premier carré ou du dernier carré, c'est une simple vérification. Dans le cas du carré central, on introduit une partition de l'unité  $(f_U, f_V)$  associée à  $(U, V)$ . Soient  $\alpha \in H^{p-1}(U \cap V)$  et  $\beta \in H_c^{n-p}(U \cup V)$ , le morphisme de connexion  $\delta^*$  est donné par  $\delta^*(\alpha) = \frac{1}{2}(d(f_V\alpha) - d(f_U\alpha)) = d(f_V\alpha) = -d(f_U\alpha)$ . De même,  $\delta^*(\beta)$  est une forme à support compact dans  $U \cap V$  qui coïncide avec la restriction de  $d(f_U\beta) = -d(f_V\beta)$  à  $U \cap V$ . Les compositions des morphismes du carré central s'écrivent alors respectivement  $\beta \mapsto \frac{1}{2} \int_{U \cup V} (d(f_V\alpha) - d(f_U\alpha)) \wedge \beta = \frac{1}{2} (\int_U d(f_V\alpha) \wedge \beta - \int_V d(f_U\alpha) \wedge \beta)$  et  $\beta \mapsto \frac{1}{2} \int_{U \cap V} \alpha \wedge (d(f_U\beta) - d(f_V\beta)) = \frac{1}{2} (-1)^{p-1} \int_{U \cap V} (d(f_U) - d(f_V)) \alpha \wedge \beta$  puisque  $\alpha$  et  $\beta$  sont fermées. Ce carré central commute donc au signe  $(-1)^p$  près, ce qui suffit pour appliquer le Lemme des

cinq isomorphismes (exercice). Ainsi, l'isomorphisme de dualité de Poincaré est démontré pour la variété  $U \cup V$ .

À présent, si la variété  $M$  est recouverte par  $m + 1$  ouverts  $U_1, \dots, U_{m+1}$ , on pose  $V = U_1 \cup \dots \cup U_m$ . Par hypothèse de récurrence, la dualité de Poincaré est vérifiée pour  $U_{m+1}$ ,  $V$  et  $U_{m+1} \cap V$ . Le même raisonnement implique donc qu'elle est valable pour  $M = U_{m+1} \cup V$ .  $\square$

**Définition 3.20.** On appelle degré d'une application  $f : M \rightarrow N$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  entre des variétés compactes connexes orientées de même dimension  $n$  l'entier  $\deg(f)$  tel que  $f^*[\omega_N] = \deg(f)[\omega_M]$  où  $\omega_M$  et  $\omega_N$  satisfont  $\int_M \omega_M = \int_N \omega_N = 1$ .

**Définition 3.21.** Un  $p$ -cycle de la variété  $M$  est un couple  $(N, f)$  où  $N$  est une variété orientée de dimension  $p$  et  $f : N \rightarrow M$  est propre de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Un tel cycle fournit un morphisme

$$\begin{aligned} \Omega_c^p(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \int_N f^* \omega \end{aligned}$$

qui se restreint aux formes fermées puis passe au quotient en un morphisme  $H_c^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ .

En effet, si  $\omega = d\omega'$ , alors  $f^*\omega = d(f^*\omega')$  et  $f^*\omega'$  est à support compact puisque  $f$  est propre. En appliquant la formule de Stokes à un voisinage  $V$  de ce compact, on obtient  $\int_N f^*d\omega' = \int_V d(f^*\omega') = \int_{\partial V} f^*\omega' = 0$ .

Par suite, d'après le Théorème 3.16, si  $M$  est orientée et possède un recouvrement fini par des ouverts dont les intersections sont vides ou difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ , alors il existe un unique élément  $[\eta_{(N,f)}] \in H^{n-p}(M, \mathbb{R})$  tel que pour tout  $[\omega] \in H_c^p(M, \mathbb{R})$ ,  $\int_N f^*\omega = \int_M \omega \wedge \eta_{(N,p)}$ . Lorsque de plus  $N$  est compacte, le cycle  $(N, p)$  fournit un morphisme  $H^p(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  et donc un élément  $[\eta_{(N,p)}]$  de  $H_c^{n-p}(M, \mathbb{R})$ .

**Définition 3.22.** Si  $M$  est orientée et recouverte par un nombre fini d'ouverts dont les intersections sont vides ou difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ , alors la classe de cohomologie  $[\eta_{(N,f)}]$  est appelée Poincaré-duale au cycle  $(N, f)$ . Lorsque  $N$  est compacte,  $[\eta_{(N,f)}]$  est appelée Poincaré-duale à support compact de  $(N, f)$ .

**Lemme 3.23.** Soit  $P$  un cobordisme orienté de dimension  $p + 1$  entre les variétés  $N_1$  et  $N_2$  et soit  $(P, f)$  un  $(p + 1)$ -cycle de la variété  $M$ . Soient  $f_1 = f|_{N_1}$  et  $f_2 = f|_{N_2}$ . Alors les Poincaré duaux de  $(N_1, f_1)$  et  $(N_2, f_2)$  coïncident.

*Démonstration.* Soit  $[\omega] \in H_c^p(M, \mathbb{R})$ , alors  $\int_{N_2} f_2^* \omega - \int_{N_1} f_1^* \omega = \int_{\partial P} f^* \omega$ . Soit  $V$  un voisinage du support de  $f$ , on a  $\int_{\partial P} f^* \omega = \int_{\partial V} f^* \omega$ . La formule de Stokes

entraîne alors  $\int_{N_2} f_2^* \omega - \int_{N_1} f_1^* \omega = \int_V d(f^* \omega) = \int_P f^*(d\omega)$ . Comme par hypothèse  $\omega$  est fermée, on obtient  $\int_{N_2} f_2^* \omega - \int_{N_1} f_1^* \omega = 0$  et comme cette égalité vaut pour tout  $[\omega]$ , on déduit  $[\eta_{(N_1, f_1)}] = [\eta_{(N_2, f_2)}]$ .  $\square$

**Lemme 3.24.** *Soit  $N$  une sous-variété compacte orientée d'une variété  $M$  orientée qui possède un recouvrement fini d'ouverts d'intersections vides ou difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ . Alors, en notant  $i$  l'inclusion de  $N$  dans  $M$ , le Poincaré dual à support compact  $\eta_{(N, i)}$  peut-être choisi à support dans un voisinage aussi petit que l'on veut de  $N$ .*

*Démonstration.* Soit  $U$  un voisinage tubulaire de  $N$  dans  $M$ . La dualité de Poincaré s'applique à  $U$  qui satisfait les hypothèses du Théorème 3.16. Le  $p$ -cycle  $(N, i)$  possède donc un Poincaré-dual à support compact dans  $U$  que l'on prolonge par 0 en dehors de  $U$  pour obtenir une forme  $\eta_{(N, i)}$  sur  $M$  satisfaisant

$$\int_N \omega|_N = \int_U \omega|_U \wedge \eta_{(N, i)} = \int_M \omega \wedge \eta_{(N, i)}.$$

Ainsi, le Poincaré-dual à support compact dans  $M$  est le poussé en avant du Poincaré-dual à support compact dans  $U$  et il suffit de choisir un voisinage tubulaire  $U$  aussi petit que l'on veut.  $\square$

**Lemme 3.25.** *Soit  $x \in N$  et  $D_x = \pi^{-1}(x)$  la fibre de  $\pi : U \rightarrow N$  au-dessus de  $x \in N$ , où  $U$  désigne un voisinage tubulaire de  $N$  dans  $M$ . On oriente  $D_x$  de sorte que la concaténation d'une base directe de  $T_x N$  avec une base directe de  $T_x D_x$  fournisse une base directe de  $T_x U$ . Alors  $\int_{D_x} \eta_{(N, i)} = 1$ , de sorte que la restriction de  $\eta_{(N, i)}$  à la fibre  $D_x$  est le Poincaré-dual à  $\{x\}$  dans  $D_x$ .*

*Démonstration.* On peut supposer  $N$  connexe et choisir deux fibres  $D_x$  et  $D_y$  au-dessus de deux points  $x \neq y$  dans  $N$ , orientés comme dans l'énoncé. En reliant  $x$  à  $y$  par un chemin  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dans  $N$  et en considérant la réunion des fibres au-dessus de  $\gamma$ , on en déduit un cobordisme  $P$  difféomorphe à  $D \times [0, 1]$  ( $D$  est le disque unité) dont le bord vaut  $D_x - D_y$ . Il résulte alors du Lemme 3.23 que

$$\int_{D_x} \eta_{(N, i)} = \int_{D_y} \eta_{(N, i)}.$$

À présent, pour tout  $\omega \in \Omega^p(U, \mathbb{R})$ , on a  $\int_N \omega|_N = \int_N \pi^*(\omega|_N)|_N$ , donc par définition de  $\eta_{(N, i)}$ ,  $\int_N \omega|_N = \int_U \pi^*(\omega|_N) \wedge \eta_{(N, i)}$ . On déduit alors du théorème de Fubini que  $\int_U \pi^*(\omega|_N) \wedge \eta_{(N, i)} = \int_N \omega|_N \int_{D_x} \eta_{(N, i)}$ . Comme l'intégrale à l'intérieur

ne dépend pas de  $x \in N$  d'après ce qui précède, on peut la sortir pour obtenir, pour tout  $\omega \in \Omega^p(U, \mathbb{R})$ ,  $\int_N \omega|_N = \left( \int_{D_{x_0}} \eta_{(N,i)} \right) \left( \int_N \omega|_N \right)$ . Ainsi,  $\int_{D_{x_0}} \eta_{(N,i)} = 1$ .  $\square$

Soit à présent deux sous-variétés compactes orientées  $N_1$  et  $N_2$  de  $M$  de dimensions respectives  $p$  et  $n-p$  qui s'intersectent transversalement, c-à-d telles que pour tout  $x \in N_1 \cap N_2$ ,  $T_x N_1 \oplus T_x N_2 = T_x M$ . L'ensemble  $N_1 \cap N_2$  est alors discret donc fini.

**Définition 3.26.** Soit  $x \in N_1 \cap N_2$ . L'indice d'intersection de  $N_1$  et  $N_2$  au point  $x$  vaut  $+1$  si la concaténation de bases directes de  $T_x N_1$  et  $T_x N_2$  est directe dans  $T_x M$  et  $-1$  sinon. Il est noté  $i_x(N_1, N_2)$ . L'indice d'intersection entre  $N_1$  et  $N_2$  vaut alors

$$N_1 \circ N_2 := \sum_{x \in N_1 \cap N_2} i_x(N_1, N_2)$$

**Proposition 3.27.** Soit  $M$  une variété orientée de dimension  $n > 0$  qui possède un recouvrement fini par des ouverts d'intersections vides ou difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux sous-variétés compactes orientées de dimensions complémentaires et qui s'intersectent transversalement. Alors

$$N_1 \circ N_2 = \int_M \eta_{(N_1,i)} \wedge \eta_{(N_2,i)}.$$

*Démonstration.* Par définition,  $\int_M \eta_{(N_1,i)} \wedge \eta_{(N_2,i)} = \int_{N_2} \eta_{(N_1,i)}$ . D'après le Lemme 3.24,  $\eta_{(N_1,i)}$  peut être choisi dans un voisinage tubulaire  $U$  de  $N_1$  aussi proche de  $N_1$  qu'on veut. Ce voisinage tubulaire peut être choisi de sorte qu'il intersecte  $N_2$  en un nombre fini de disques  $(D_x)_{x \in N_1 \cap N_2}$ . De plus, la projection  $\pi : U \rightarrow N_1$  peut être choisie telle que pour tout  $x \in N_1 \cap N_2$ ,  $D_x = \pi^{-1}(x)$ .

$$\text{Alors } \int_{N_2} \eta_{(N_1,i)} = \sum_{x \in N_1 \cap N_2} \int_{D_x} \eta_{(N_1,x)} = N_1 \circ N_2 \text{ d'après le Lemme 3.25. } \quad \square$$

En fait, si  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas de dimensions complémentaires mais s'intersectent transversalement,  $N_1 \cap N_2$  est une sous-variété qui hérite d'une orientation et  $\eta_{N_1 \cap N_2} = \eta_{N_1} \wedge \eta_{N_2}$ , voir [1].

**Définition 3.28.** Soit  $M$  une variété compacte orientée de dimension paire  $2p$ . Alors la forme bilinéaire non dégénérée

$$\begin{aligned} H^p(M) \times H^p(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$



est appelée forme d'intersection.

Elle est symétrique si  $p$  est pair et antisymétrique sinon. Lorsque  $p$  est pair, la signature de cette forme d'intersection est appelée signature de la variété et notée  $\sigma(M) = \sigma^+(M) - \sigma^-(M)$ .

*Exercice 3.29.* Calculer la signature d'une somme connexe de copies de  $\mathbb{C}P^2$  et  $\overline{\mathbb{C}P^2}$  (voir le Théorème 1.26).

### 3.1.4 Formule de Künneth

**Théorème 3.30** (Formule de Künneth). *Soit  $M$  une variété possédant un recouvrement par un nombre fini d'ouverts dont les intersections sont vides ou difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ . Alors, pour toute variété  $N$  et tout entier naturel  $q$ , on a*

$$H^q(M \times N) = \bigoplus_{p=0}^q H^p(M) \otimes H^{q-p}(N),$$

$$H_c^q(M \times N) = \bigoplus_{p=0}^q H_c^p(M) \otimes H_c^{q-p}(N).$$

*Démonstration.* On commence par remarquer que si  $\alpha \in \Omega^p(M, \mathbb{R})$  et  $\beta \in \Omega^{q-p}(N, \mathbb{R})$ , alors  $\pi_1^* \alpha \wedge \pi_2^* \beta \in \Omega^q(M \times N)$  où  $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$  et  $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$  sont les projections. De plus, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont fermées, alors  $\pi_1^* \alpha \wedge \pi_2^* \beta$  est aussi fermée. De même, si  $\alpha$  ou  $\beta$  est exacte et l'autre est fermée,  $\pi_1^* \alpha \wedge \pi_2^* \beta$  est exacte. On en déduit un morphisme

$$\begin{aligned} \psi_{p,q} : H^p(M) \otimes H^{q-p}(N) &\rightarrow H^q(M \times N) \\ \sum a_i [\alpha_i] \otimes [\beta_i] &\mapsto \sum a_i [\pi_1^* \alpha_i \wedge \pi_2^* \beta_i] \end{aligned}$$

et un morphisme

$$\begin{aligned} (\psi_{p,q})_c : H_c^p(M) \otimes H_c^{q-p}(N) &\rightarrow H_c^q(M \times N) \\ \sum a_i [\alpha_i] \otimes [\beta_i] &\mapsto \sum a_i [\pi_1^* \alpha_i \wedge \pi_2^* \beta_i] \end{aligned}$$

Notons alors  $\psi_q = \bigoplus_{p=0}^q \psi_{p,q}$  et  $(\psi_q)_c = \bigoplus_{p=0}^q (\psi_{p,q})_c$  et montrons que  $\psi_q$  et  $(\psi_q)_c$  sont des isomorphismes. On raisonne par récurrence sur le nombre d'ouverts qui recouvrent  $M$  que l'on note  $m$ .

Si  $m = 1$ , alors  $M \simeq \mathbb{R}^n$  et le résultat découle du Théorème 3.4 ou de la Proposition 3.6 dans le cas à support compact. Si  $M = U \cup V$ , on écrit la suite de Mayer-Vietoris à coefficients dans  $H^{q-p}(N)$ , pour tout  $0 \leq p \leq q$ , pour obtenir la suite longue

$$\dots \rightarrow H^{p-1}(U \cap V) \otimes H^{q-p}(N) \rightarrow H^p(M) \otimes H^{q-p}(N) \rightarrow (H^p(U) \oplus H^p(V)) \otimes H^{q-p}(N) \rightarrow \dots$$

Par sommation sur  $p$ , on en déduit

$$\cdots \rightarrow \bigoplus_{p=0}^q H^{p-1}(U \cap V) \otimes H^{q-p}(N) \rightarrow \bigoplus_{p=0}^q H^p(M) \otimes H^{q-p}(N) \rightarrow \bigoplus_{p=0}^q (H^p(U) \oplus H^p(V)) \otimes H^{q-p}(N) \rightarrow \cdots$$

De même, la suite de Mayer-Vietoris de  $M \times N$  s'écrit

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}((U \cap V) \times N) \rightarrow H^q(M \times N) \rightarrow H^q(U \times N) \oplus H^q(V \times N) \rightarrow H^q((U \cap V) \times N) \rightarrow \cdots$$

On vérifie que les morphismes  $\psi$  induisent un morphisme entre ces suites exactes (exercice) et d'après l'hypothèse de récurrence, le lemme des cinq s'applique pour fournir l'isomorphisme  $\psi : \bigoplus_{p=0}^q H^p(M) \otimes H^{q-p}(N) \rightarrow H^q(M \times N)$ .

De même, la suite de Mayer-Vietoris à supports compacts et coefficients dans  $H^{q-p}(N)$  s'écrit, après sommation sur  $p$ ,

$$\cdots \leftarrow \bigoplus_{p=0}^q H_c^{p+1}(U \cap V) \otimes H_c^{q-p}(N) \leftarrow \bigoplus_{p=0}^q H_c^p(M) \otimes H_c^{q-p}(N) \leftarrow \bigoplus_{p=0}^q (H_c^p(U) \oplus H_c^p(V)) \otimes H_c^{q-p}(N) \leftarrow \cdots$$

Les morphismes  $\psi$  induisent un morphisme avec la suite exacte

$$\cdots \leftarrow H_c^{q+1}((U \cap V) \times N) \leftarrow H_c^q(M \times N) \leftarrow H_c^q(U \times N) \oplus H_c^q(V \times N) \leftarrow H_c^q((U \cap V) \times N) \leftarrow \cdots$$

et le lemme des cinq fournit le résultat.

Supposons à présent le résultat vérifié pour  $m$  ouverts et supposons que  $M = U_1 \cup \cdots \cup U_{m+1}$ . On pose  $V = U_1 \cup \cdots \cup U_m$  de sorte que  $M = U_{m+1} \cup V$  et  $U_{m+1} \cap V$ ,  $U_{m+1}$  et  $V$  satisfont les hypothèses de récurrence. Le résultat découle alors de ce qui précède.  $\square$

**Corollaire 3.31.** *On a  $H^1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}^2$ . Plus généralement, pour tout  $0 \leq p \leq n$ ,  $H^p((\mathbb{S}^1)^n) = \bigwedge^p H^1((\mathbb{S}^1)^n)$ , de sorte que  $b_p((\mathbb{S}^1)^n) = \binom{n}{p}$ .*

*Démonstration.* Ce corollaire résulte de la Proposition 3.3 et du Théorème 3.30.  $\square$

*Remarque 3.32.* La formule de Künneth a une version purement algébrique. Si

$$\cdots \rightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow D_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} D_p \xrightarrow{\partial_p} D_{p-1} \rightarrow \cdots$$

sont des complexes de chaînes de groupes abéliens (ou  $A$ -modules), on peut former leur produit tensoriel  $C \otimes D$ , noté

$$\cdots \rightarrow E_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} E_q \xrightarrow{\partial_q} E_{q-1} \rightarrow \cdots$$

où pour tout entier  $q$ ,  $E_q = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (C_p \otimes D_{q-p})$  et où l'application de bord  $\partial_q : E_q \rightarrow E_{q-1}$  est définie sur les tenseurs simples par

$$\partial_q(c_p \otimes d_{q-p}) = \partial_p(c_p) \otimes d_{q-p} + (-1)^p c_p \otimes \partial_{q-p}(d_{q-p}).$$

**Théorème 3.33** (Formule de Künneth pour les complexes de chaînes). *Soient  $C$  et  $D$  deux complexes de chaînes de groupes abéliens tels que  $C$  est libre. Alors, pour tout entier  $q$ , on a la suite exacte courte*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(C) \otimes H_{q-p}(D) \rightarrow H_q(C \otimes D) \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \text{Tor}(H_{p-1}(C), H_{q-p}(D)) \rightarrow 0.$$

Cette formule de Künneth compare l'homologie de  $C \otimes D$  avec l'homologie de  $C$  et de  $D$ . Elle généralise la formule des coefficients universels en homologie qui correspond au cas où  $D$  est concentré en degré 0.

## 3.2 Homologie simpliciale

La référence pour cette partie du cours est le livre de James Munkres [10].

### 3.2.1 Complexes simpliciaux

**Définition 3.34.** *Le simplexe standard de dimension  $n$  est l'ensemble*

$$\mathfrak{S}_n := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}.$$

*Le  $n$ -simplexe engendré par les points affinements indépendants  $v_0, \dots, v_n$  de  $\mathbb{R}^N$  est l'ensemble*

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i, \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}.$$

*Les points  $v_i$  sont les sommets du simplexe et on appelle face de dimension  $k$  de  $\sigma$  tout simplexe engendré par les sommets  $\{v_j, j \in J\}$ , où  $J \subset \{0, \dots, n\}$  est de cardinal  $k + 1$ .*

**Définition 3.35.** *Un complexe simplicial  $K$  de  $\mathbb{R}^N$ , où  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , est une réunion de simplexes telle que*

1. *Toute face d'un simplexe de  $K$  est dans  $K$ ,*
2. *L'intersection de deux simplexes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de  $K$  est soit vide, soit une face de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_2$ .*

**Définition 3.36.** *On appelle sous-complexe d'un complexe  $K$  tout sous-ensemble  $L$  de  $K$  qui contient les faces de tous ses éléments. Pour tout entier naturel  $n$ , le  $n$ -squelette de  $K$  est le sous-complexe  $K^{(n)}$  de  $K$  formé de la réunion de tous les simplexes de  $K$  de dimension plus petite ou égale à  $n$ .*

**Lemme 3.37.** Soient  $K$  et  $L$  deux complexes simpliciaux et  $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$  une application telle que lorsque  $v_0, \dots, v_k \in K^{(0)}$  sont les sommets d'un  $k$ -simplexe,  $f(v_0), \dots, f(v_k)$  engendrent un simplexe de  $L$  (de dimension inférieure ou égale à  $k$ ). Alors  $f$  s'étend en  $\tilde{f} : (\sum t_i v_i) \in K \mapsto (\sum t_i f(v_i)) \in L$  qui est continue.

*Remarque 3.38.* La démonstration (facile) est laissée en exercice. Remarquons que les sommets  $f(v_0), \dots, f(v_k)$  ne sont pas forcément distincts.

**Définition 3.39.** Une application simpliciale entre les complexes  $K$  et  $L$  est une application donnée par le Lemme 3.37.

**Définition 3.40.** On appelle triangulation d'une variété  $M$  tout homéomorphisme  $h : M \rightarrow K$  où  $K$  est un complexe simplicial.

**Théorème 3.41.** Toute variété différentielle possède une triangulation.

On ne démontre ici que le cas où  $M$  est une variété compacte, en suivant l'approche de H. Whitney (on pourra consulter son ouvrage [12] pour le cas général).

*Démonstration.* On procède en deux étapes.

- 1) Toute variété compacte  $M$  se plonge dans un  $\mathbb{R}^N$  (en fait le résultat est vrai pour  $M$  quelconque, c'est le théorème du plongement de Whitney). En effet, recouvrons  $M$  par un nombre fini de cartes  $\varphi_i : U_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ . Soit  $\rho_i : M \rightarrow [0, 1]$  des fonctions lisses à supports compacts dans  $U_i$  telles que  $K_i := \rho_i^{-1}(1)$  recouvrent la variété (de telles fonctions existent et s'obtiennent par exemple à l'aide d'une partition de l'unité). On note  $(\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^n)$  les coordonnées de  $\varphi_i$ , de sorte que  $\varphi_i(x) = (\varphi_i^1(x), \dots, \varphi_i^n(x))$ . On pose alors  $\psi_i : x \in M \mapsto (\rho_i(x), \rho_i(x)\varphi_i^1(x), \dots, \rho_i(x)\varphi_i^n(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . En particulier, sur  $K_i$ ,  $\psi_i = (1, \varphi_i)$ . Alors l'application

$$\begin{aligned} \psi : M &\rightarrow \mathbb{R}^N = \bigoplus_i \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\mapsto (\psi_i(x))_i \end{aligned}$$

est un plongement, puisque pour tout  $x \in M$ , il existe  $i \in I$  tel que  $x \in K_i$  et alors l'injectivité de  $d_x \varphi_i$  entraîne l'injectivité de  $d_x \psi_i$  qui entraîne celle de  $d_x \psi$ . De plus, si  $x \neq y$ , alors il existe  $i \in I$  tel que  $x \in K_i$ . Si  $y \in K_i$ , alors  $\varphi_i(y) \neq \varphi_i(x)$  et donc  $\psi(y) \neq \psi(x)$ . Si  $y \notin K_i$ , alors  $\rho_i(y) < 1$ , de sorte que  $\psi_i(y) \neq \psi_i(x)$  puis  $\psi(y) \neq \psi(x)$ . Ainsi,  $\psi$  est injective. Le cas général est analogue, mais il faut gérer la non-compacité de  $M$ , voir [12].

- 2) Supposons à présent  $M$  (proprement) plongée dans un  $\mathbb{R}^N$  et considérons le pavage de  $\mathbb{R}^N$  par le réseau  $\epsilon \mathbb{Z}^N$ , où  $\epsilon$  est très petit par rapport à la taille d'un voisinage tubulaire de  $M$ . Quitte à perturber un peu le plongement de  $M$  dans  $\mathbb{R}^N$ , on peut supposer que son image ne rencontre aucune face de ces cubes de codimension plus grande que  $n$  et que si  $M$  rencontre une face de codimension

$n$ , l'intersection est transverse et en un point (résultats de transversalités). Dans chaque cube de taille  $\epsilon$ ,  $M$  ressemble à un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^N$  qui rencontre ce cube. L'intersection ressemble alors à un polytope de dimension  $n$  qu'il suffit de trianguler. En fait, ce polytope est le projeté sur  $M$  de l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^N$  du nombre fini de points d'intersection de  $M$  avec les faces de codimension  $n$  du cube de taille  $\epsilon$ . Cette enveloppe convexe se trouve dans le voisinage tubulaire de  $M$ . On en déduit le résultat.  $\square$

Ce Théorème 3.41 admet le corollaire suivant, que l'on a déjà utilisé plusieurs fois auparavant.

**Corollaire 3.42.** *Toute variété différentielle compacte de dimension  $n$  possède un recouvrement par un nombre fini d'ouverts dont les intersections sont vides ou difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ .*

*Démonstration.* Soit  $M$  une variété compacte équipée d'une triangulation finie  $\tau$ . On définit pour tout sommet  $s$  de  $\tau$  l'ouvert  $U_s$  comme l'intérieur de l'union des simplexes qui contiennent  $s$  comme sommet. C'est un ouvert de  $M$  difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$  et l'ensemble des  $U_s$  recouvrent  $M$ . De plus, si  $s_1, \dots, s_k$  sont des sommets de la triangulation,  $U_{s_1} \cap \dots \cap U_{s_k}$  est vide si  $s_1, \dots, s_k$  n'engendrent pas un simplexe de la triangulation et coïncide avec l'intérieur de la réunion des simplexes qui contiennent  $[s_1, \dots, s_k]$  comme face sinon. En particulier,  $U_{s_1} \cap \dots \cap U_{s_k}$  se rétracte sur  $[s_1, \dots, s_k]$  et se trouve être difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . Ce recouvrement convient donc.  $\square$

### 3.2.2 Homologie et cohomologie simpliciales

**Définition 3.43.** *Une orientation d'un  $p$ -simplexe  $\sigma$  est la donnée d'un ordre sur ses sommets modulo changement de l'ordre par une permutation paire. On note  $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$  un  $p$ -simplexe orienté de sommets  $v_0, \dots, v_p$ . Si  $\theta \in \mathfrak{S}_{p+1}$  est une permutation paire,  $[v_0, \dots, v_p] = [v_{\theta(0)}, \dots, v_{\theta(p)}]$  comme simplexe orienté. Sinon  $[v_{\theta(0)}, \dots, v_{\theta(p)}] =: -\sigma \neq \sigma$ .*

**Définition 3.44.** *Une  $p$ -chaîne simpliciale d'un complexe  $K$  est une fonction  $c_p$  qui à tout  $p$ -simplexe orienté  $[v_0, \dots, v_p]$  de  $K$  associe un entier relatif tel que :*

1. *Pour toute permutation  $\theta \in \mathfrak{S}_{p+1}$ ,  $c_p([v_0, \dots, v_p]) = \epsilon(\theta)c_p([v_{\theta(0)}, \dots, v_{\theta(p)}])$ .*
2. *Le support de  $c_p$  est fini.*

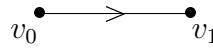
On note une telle  $p$ -chaîne  $c_p = \sum_{i \in I} a_i [v_0^i, \dots, v_p^i]$ , où  $a_i \in \mathbb{Z}$ ,  $I$  est fini, et  $v_0^i, \dots, v_p^i$  engendrent un  $p$ -simplexe de  $K$ , étant entendu que  $a_i [v_0^i, \dots, v_p^i] = -a_i [v_{\theta(0)}^i, \dots, v_{\theta(p)}^i]$

si  $\theta$  est impaire. On note  $C_p(K)$  l'ensemble des  $p$ -chaînes simpliciales de  $K$ . C'est un groupe abélien libre dont une base est donnée par les  $p$ -simplexes de  $K$ , chaque simplexe étant équipé d'une orientation. On définit alors

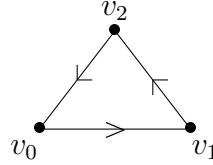
$$\begin{aligned}\partial_p : C_p(K) &\rightarrow C_{p-1}(K) \\ [v_0, \dots, v_p] &\mapsto \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]\end{aligned}$$

et on vérifie que pour tout  $\theta \in \mathfrak{S}_{p+1}$ ,  $\partial_p([v_{\theta(0)}, \dots, v_{\theta(p)}]) = \epsilon(\theta) \partial_p([v_0, \dots, v_p])$  (il suffit de le vérifier pour des transpositions).

*Exemple 3.45.* 1)  $\partial_1[v_0 v_1] = [v_1] - [v_0]$  exprime le bord d'un intervalle orienté comme la différence du sommet but et du sommet source.



2)  $\partial_1[v_0 v_1 v_2] = [v_1 v_2] - [v_0 v_2] + [v_0 v_1]$  exprime le bord d'un triangle orienté comme la somme de ses trois côtés munis de l'orientation induite.



En général, cette formule purement combinatoire de  $\partial_p$  exprime le bord d'un  $p$ -simplexe orienté comme la somme de ses  $p + 1$  faces équipées de l'orientation induite.

**Lemme 3.46.** *Soit  $K$  un complexe simplicial. Alors pour tout entier naturel  $p$ , la composée  $\partial_{p-1} \circ \partial_p$  s'annule.*

*Démonstration.* Cette démonstration est purement combinatoire. Il suffit de vérifier le résultat sur une base de  $C_p(K)$  et donc sur chaque  $p$ -simplexe orienté. Soit  $[v_0 \dots v_p]$  un tel  $p$ -simplexe orienté de  $K$ . Alors,

$$\begin{aligned}\partial_{p-1} \circ \partial_p[v_0 \dots v_p] &= \partial_{p-1}\left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]\right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_p] + \sum_{j=i+1}^p (-1)^{j-1} [v_0 \dots \hat{v}_i \dots \hat{v}_j \dots v_p]\right) \\ &= \sum_{0 < j < i < p} (-1)^{i+j} [v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_p] + \sum_{0 < i < j < p} (-1)^{i+j-1} [v_0 \dots \hat{v}_i \dots \hat{v}_j \dots v_p] \\ &= 0\end{aligned}$$

□

On note  $C^p(K) = \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{Z})$  et  $d^p = {}^t\partial_{p+1}$ . On a ainsi associé à tout complexe simplicial et donc à toute variété différentielle triangulée, des complexes de chaînes

$$\cdots \rightarrow C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \rightarrow \cdots$$

et de cochaînes

$$\cdots \leftarrow C^{p+1}(K) \xleftarrow{d_p} C^p(K) \xleftarrow{d_{p-1}} C^{p-1}(K) \leftarrow \cdots$$

dont les homologies sont appelées homologie et cohomologie simpliciales et notées  $H_*(K, \mathbb{Z})$  et  $H^*(K, \mathbb{Z})$  respectivement. De plus, si  $G$  est un groupe abélien, on note  $H_*(K, G) = H_*(C_*(K) \otimes G)$  et  $H^*(K, G) = H_*(\text{Hom}(C_*(K), G))$  les homologies et cohomologies simpliciales à coefficients dans  $G$ .

*Exercice 3.47.* Calculer l'homologie d'un simplexe, du bord d'un simplexe et de l'octaèdre.

**Lemme 3.48.** *Soit  $K$  un complexe simplicial fini et  $A$  un corps. Alors la caractéristique d'Euler de  $C(K, A)$  ne dépend pas de  $A$  et vaut  $\chi(K) = \# \text{ sommets} - \# \text{ arêtes} + \# \text{ triangles} - \dots$*

*Démonstration.* Pour tout entier naturel  $p$ ,  $C_p(K, A)$  est un  $A$ -espace vectoriel de dimension le nombre de  $p$ -simplexes de  $K$ . Le résultat découle de la définition de la caractéristique d'Euler.  $\square$

Si  $L$  est un sous-complexe d'un complexe  $K$ ,  $C(L)$  est naturellement un sous-complexe de chaînes de  $C(K)$  et on note, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $C_p(K, L) = C_p(K)/C_p(L)$ .

Le morphisme de bord  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  passe au quotient en un morphisme  $\partial_p : C_p(K, L) \rightarrow C_{p-1}(K, L)$  de sorte que  $(C_p(K, L), \partial_p)$  est un complexe de groupes abéliens libres (exercice) qui s'inscrit dans la suite exacte courte de complexes  $0 \rightarrow C(L) \rightarrow C(K) \rightarrow C(K, L) \rightarrow 0$ .

**Définition 3.49.** *L'homologie de  $C(K, L)$  est appelée homologie relative de  $K$  modulo  $L$ .*

La suite exacte longue en homologie associée à cette suite exacte courte est très pratique pour calculer l'homologie de  $K$ , surtout lorsqu'on la combine avec le théorème d'excision suivant.

**Théorème 3.50** (Théorème d'excision). *Soit  $K$  un complexe simplicial et  $L$  un sous-complexe de  $K$ . Soit  $M \subset L$  tel que  $K \setminus M$  est un sous-complexe de  $K$  et  $L \setminus M$  un sous-complexe de  $L$ . Alors  $C(K, L) \simeq C(K \setminus M, L \setminus M)$  de sorte que pour tout entier naturel  $p$ ,  $H_p(K, L) \simeq H_p(K \setminus M, L \setminus M)$ .*

Typiquement,  $K$  est une variété triangulée,  $L$  un fermé de  $K$  d'intérieur non-vide et  $M$  un ouvert triangulé de  $L$ .

*Démonstration.* Par hypothèse,  $C(K \setminus M)$  s'injecte dans  $C(K)$ . En composant par la surjection  $C(K) \rightarrow C(K, L)$  on obtient un morphisme  $C(K \setminus M) \rightarrow C(K, L)$  de noyau  $C(K \setminus M) \cap C(L) = C(L \setminus M)$ . Il s'agit donc de montrer que ce morphisme est surjectif. Or  $C(K, L)$  est libre, une base étant donnée par les simplexes de  $K$  qui ne sont pas dans  $L$ . Comme tous ces simplexes sont dans  $K \setminus M$ , le morphisme est bien surjectif.  $\square$

*Exercice 3.51.* Calculer  $H_*(\sigma, \partial\sigma, \mathbb{Z})$ , où  $\sigma$  est le simplexe standard de dimension  $n$ .

**Définition 3.52.** Si  $L$  est un sous-complexe de  $K$  et  $G$  un groupe abélien, le complexe  $\text{Hom}(C_*(K, L), G) = C^*(K, L, G)$  est appelé complexe des cochaînes de  $K$  relatives à  $L$  à coefficients dans  $G$ .

On en déduit une suite exacte courte de complexes de cochaînes

$$0 \rightarrow C^*(K, L, G) \rightarrow C^*(K, G) \rightarrow C^*(L, G) \rightarrow 0,$$

puisque la suite exacte  $0 \rightarrow C_*(L) \rightarrow C_*(K) \rightarrow C_*(K, L) \rightarrow 0$  est formée de groupes libres.

**Définition 3.53.** On dit qu'une variété triangulée est orientable lorsqu'il est possible de munir chaque simplexe de dimension maximale d'une orientation de sorte que la somme de ces simplexes soit un cycle. La classe d'homologie de ce cycle est alors appelée classe fondamentale de la variété orientée.

### 3.2.3 Subdivision barycentrique

**Définition 3.54.** Soit  $K$  un complexe simplicial. La subdivision barycentrique de  $K$  est le complexe simplicial  $L$  obtenu en remplaçant chaque simplexe de  $K$  par sa subdivision barycentrique. La subdivision barycentrique d'un simplexe  $\sigma$  est définie par récurrence en ajoutant le barycentre de  $\sigma$  et en considérant le cône sur son bord subdivisé. On note ce complexe  $sd(K)$ .

Remarquons que les simplexes de la subdivision barycentrique de  $K$  sont exactement les simplexes  $[\hat{\sigma}_{i_1}, \dots, \hat{\sigma}_{i_k}]$  où  $\hat{\sigma}_{i_j}$  désigne le barycentre de  $\sigma_{i_j}$ ,  $\sigma_{i_j}$  est un simplexe de  $K$  et où pour  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $\sigma_{i_{j+1}}$  est une face de  $\sigma_{i_j}$ . Étant donné un simplexe  $\sigma$  de ce complexe, la réunion des simplexes  $[\hat{\sigma}_{i_1}, \dots, \hat{\sigma}_{i_k}]$  de  $sd(K)$  tels que  $\sigma_{i_1} = \sigma$  est exactement  $\sigma$ .

**Définition 3.55.** Soit  $\sigma$  un complexe de  $K$ . On appelle cellule duale de  $\sigma$  et on note  $D(\sigma)$  la réunion des simplexes de  $[\hat{\sigma}_{i_1}, \dots, \hat{\sigma}_{i_k}]$  de  $sd(K)$  tels que  $\sigma_{i_k} = \sigma$ .

La réunion des cellules duales partitionne  $K$ . C'est la cellulation duale de  $K$ . Lorsque  $K$  est une variété orientée, on s'en servira pour définir une homologie et montrer la dualité de Poincaré, selon laquelle  $H_p(K; G) \simeq H^{n-p}(K; G)$  pour tout groupe abélien  $G$ , voir le Théorème 3.77.



### 3.3 Homologie singulière

#### 3.3.1 Complexes singuliers

**Définition 3.56.** *Un simplexe singulier de dimension  $p$  d'un espace topologique  $X$  est une application continue  $\sigma$  du simplexe standard  $\Delta_p$  de dimension  $p$  dans  $X$ . Le groupe abélien libre engendré par les  $p$ -simplexes singuliers est appelé groupe des  $p$ -chaînes singulières et noté  $S_p(X)$ .*

Le groupe  $S_p(X)$  est un groupe abélien libre de rang infini. Une  $p$ -chaîne singulière s'écrit  $\sigma = \sum_{i \in I} a_i \sigma_i$  où  $I$  est fini,  $a_i$  est un entier et  $\sigma_i$  est un  $p$ -simplexe singulier de  $X$ . On note  $\Delta_p = [v_0, \dots, v_p]$  le simplexe standard. Si  $\sigma$  est un  $p$ -simplexe singulier, on définit

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]}.$$

En identifiant la face  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$  au simplexe standard de dimension  $p-1$ , on obtient une  $(p-1)$ -chaîne singulière. Ainsi, l'opérateur  $\partial$  s'étend par linéarité en un morphisme  $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ .

**Lemme 3.57.** *Pour tout espace topologique  $X$  et tout entier  $p$ , on a  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ .*

*Démonstration.* La vérification est analogue à celle effectuée pour démontrer le Lemme 3.46.  $\square$

À tout espace topologique  $X$  est donc associé un complexe de chaînes singulières

$$\cdots \rightarrow S_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} S_p(X) \xrightarrow{\partial_p} S_{p-1}(X) \rightarrow \cdots$$

ainsi qu'un complexe de cochaînes singulières  $S^p(X) = \text{Hom}(S_p(X), \mathbb{Z})$ . On dispose aussi des versions à coefficients dans un groupe abélien  $G$ , à savoir  $S_p(X, G) = S_p(G) \otimes G$  et  $S^p(X, G) = \text{Hom}(S_p(X), G)$ .

*Exercice 3.58.* Montrer que  $H_0(X, \mathbb{Z})$  est un groupe abélien libre de rang le nombre de composantes connexes par arcs de  $X$ .

Remarquons que le morphisme  $\epsilon$  défini par

$$\begin{aligned} \epsilon : S_p(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{i \in I} a_i \sigma_i &\mapsto \sum_{i \in I} a_i \end{aligned}$$

passé au quotient en un morphisme  $\epsilon : H_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  appelé augmentation. On peut prolonger le complexe de chaînes singulières en un complexe augmenté

$$\cdots \rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

dont l'homologie est appelée homologie réduite et notée  $\tilde{H}_p(X)$ . On vérifie alors que le rang de  $\tilde{H}_0(X)$  est un de moins que celui de  $H_0(X)$  et que  $\tilde{H}_p(X) \simeq H_p(X)$  si  $p > 0$ .

Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  induit un morphisme

$$\begin{aligned} f_* : S_*(X) &\rightarrow S_*(Y) \\ \sum_{i \in I} a_i \sigma_i &\mapsto \sum_{i \in I} a_i f \circ \sigma_i \end{aligned}$$

et on a ainsi à nouveau obtenu un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des complexes de groupes abéliens.

**Théorème 3.59.** *Soient  $f_0$  et  $f_1$  deux applications continues homotopes, alors les morphismes induits  $(f_0)_*$  et  $(f_1)_*$  sont homotopes et donc les mêmes en homologie.*

*Démonstration.* Soit  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  une homotopie entre  $f_0$  et  $f_1$ . On note  $F(t, x) = f_t(x)$ . Pour tout entier naturel  $p$ , triangulons le polytope  $\Delta_p \times [0, 1]$  pour obtenir un complexe simplicial de dimension  $p + 1$  orienté. La somme des  $(p + 1)$ -simplexes orientés définit une  $(p + 1)$ -chaîne singulière de  $\Delta_p \times [0, 1]$  notée  $H(\Delta_p)$ , c'est sa classe fondamentale.

On a  $\partial(H(\Delta_p)) = \Delta_p \times \{1\} - \Delta_p \times \{0\} - H(\partial\Delta_p)$ . On en déduit un morphisme

$$\begin{aligned} H_* : S_p(X) &\rightarrow S_{p+1}(X \times [0, 1]) \\ \sum_{i \in I} a_i \sigma_i &\mapsto \sum_{i \in I} a_i (\sigma_i \times Id_{[0, 1]}) \circ H(\Delta_p) \end{aligned}$$

et en composant par le morphisme  $F_* : S_{p+1}(X \times [0, 1]) \rightarrow S_{p+1}(Y)$  on en déduit un morphisme  $F_* \circ H_* : S_p(X) \rightarrow S_{p+1}(Y)$ . Par définition, pour tout  $p$ -simplexe singulier  $\sigma$  de  $X$ , on a

$$\partial(F_* \circ H_*(\sigma)) = \partial(F \circ (\sigma \times Id_{[0, 1]})(H(\Delta_p))) = F \circ (\sigma \times Id_{[0, 1]}) \partial(H(\Delta_p))$$

et donc par ce qui précède,  $\partial(F_* \circ H_*)(\sigma) = (f_1)_* \sigma - (f_0)_* \sigma - (F_* \circ H_*) \partial \sigma$ . On a donc défini une homotopie algébrique entre  $(f_0)_*$  et  $(f_1)_*$ .  $\square$

**Corollaire 3.60.** *L'homologie singulière réduite de  $\mathbb{R}^n$  est nulle, on dit qu'il est acyclique. L'homologie singulière d'un espace topologique  $X$  ne dépend que de son type d'homotopie.*

*Démonstration.* Si  $X$  et  $Y$  ont le même type d'homotopie, il existe deux applications  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  tels que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont homotopes à l'identité. D'après le Théorème 3.59,  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_* = Id$  et  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* = Id$ , de sorte que  $f_*$  et  $g_*$  sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre  $H_*(X; \mathbb{Z})$  et  $H_*(Y; \mathbb{Z})$ . Comme  $\mathbb{R}^n$  a le type d'homotopie du point,  $H_*(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \simeq H_*(pt; \mathbb{Z})$ . Or tous les  $p$ -simplexes singuliers du point sont les mêmes, ce sont les applications

constantes  $\Delta_p \rightarrow \Delta_0 = pt$ . Le  $p$ -simplexe constant  $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_0 = pt$  satisfait  $\partial\sigma_p = \sum_{i=0}^p \sigma_p|_{[v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]} = \sigma_{p-1}$  si  $p$  est pair et 0 sinon. Le complexe de chaînes singulières du point s'écrit donc

$$\cdots \rightarrow S_{2p+1}(pt) \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{0} S_{2p}(pt) \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{id} S_{2p-1}(pt) \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots \rightarrow S_1(pt) \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{0} S_0(pt) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

de sorte que son homologie est nulle sauf en degré zéro où elle est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

Si  $A \subset X$ , alors  $S(A)$  est un sous-complexe de  $S(X)$  et on note  $S(X, A)$  le complexe quotient  $S(X)/S(A)$ . On note encore  $\partial_p$  l'application induite sur le complexe quotient.

**Définition 3.61.** *L'homologie de  $S(X, A)$  est appelée homologie singulière de  $X$  relative à  $A$ .*

**Théorème 3.62** (Excision en homologie singulière). *Soit  $X$  un espace topologique,  $A \subset X$  et  $U \subset X$  tels que  $\overline{U} \subset \mathring{A}$ . Alors l'inclusion de la paire  $(X \setminus U, A \setminus U)$  dans  $(X, A)$  induit un isomorphisme en homologie singulière, de sorte que*

$$H_*(X \setminus U, A \setminus U) \simeq H_*(X, A).$$

*Démonstration.* Remarquons que par hypothèse, les ouverts  $X \setminus \overline{U}$  et  $\mathring{A}$  recouvrent  $X$ . On procède en quatre étapes.

- 1) Soit  $\sigma = \sum a_i \sigma_i$  une  $p$ -chaîne singulière de  $X$ , de sorte que  $\sigma_i : \Delta_p \rightarrow X$  soit continue. En appliquant  $m$  fois le procédé de subdivision barycentrique à  $\Delta_p$ , où  $m$  est suffisamment grand, on obtient un complexe simplicial  $sd^m(\Delta_p)$ , voir le §3.2.3. Alors pour tout indice  $i$ ,  $\sigma_i : sd^m(\Delta_p) \rightarrow X$  est une  $p$ -chaîne singulière notée  $sd^m(\sigma_i)$  et  $sd^m(\sigma) = \sum a_i sd^m(\sigma_i)$  est une  $p$ -chaîne singulière dont tous les simplexes singuliers sont à image dans un des ouverts  $X \setminus \overline{U}$  ou  $\mathring{A}$ . En effet, à  $\sigma_i$  fixé, on considère le recouvrement de  $\Delta_p$  par les ouverts  $\sigma_i^{-1}(X \setminus \overline{U})$  et  $\sigma_i^{-1}(\mathring{A})$ . Comme  $\Delta_p$  est métrique et compact, il existe un  $\epsilon$  de Lebesgue associé à ce recouvrement, de sorte que les boules de rayon de  $\epsilon$  sont toutes contenues dans un des ouverts du recouvrement. Lorsque  $m_i$  est assez grand, les  $p$ -simplexes de  $sd^{m_i}(\Delta_p)$  sont de diamètre plus petit que  $\epsilon/2$ . Ce nombre d'indices  $i$  étant fini, on peut choisir  $m$  comme étant le maximum des entiers  $m_i$ . Attention, l'entier  $m$  varie en fonction de la  $p$ -chaîne singulière  $\sigma$ .
- 2) Quel que soit  $m \in \mathbb{N}^*$  fixé, les morphismes  $sd^m$  et  $Id : S(X) \rightarrow S(X)$  sont homotopes. Il existe  $H_p : S_p(X) \rightarrow S_{p+1}(X)$  tel que  $sd^m(\sigma) - \sigma = \partial H\sigma + H\partial\sigma$ . Cette homotopie se construit par récurrence au niveau des simplexes comme dans la démonstration du Théorème 3.59. Si  $p = 0$ ,  $H_p = 0$  convient. Si  $H$  est contruite jusqu'au rang  $p - 1$ , on note  $i_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_p$  le simplexe singulier

identité de  $\Delta_p$ . Alors  $\partial(sd^m i_p) = sd^m(\partial i_p)$ . Posons  $c_p = sd^m(i_p) - i_p - H_{p-1}\partial i_p$ . C'est un  $p$ -cycle singulier puisque

$$\begin{aligned}\partial c_p &= \partial sd^m(i_p) - \partial i_p - \partial H_{p-1}\partial i_p \\ &= sd^m(\partial i_p) - \partial i_p - \partial H_{p-1}\partial i_p \\ &= H(\partial \circ \partial i_p) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$H_{p-1}$  étant une homotopie entre  $Id$  et  $sd^m$ . Comme  $H_p(\Delta_p) = 0$ , il existe une  $(p+1)$ -chaîne singulière  $H_p i_p$  telle que  $c_p = \partial(H_p i_p)$ , ce qui construit  $H$  au rang  $p+1$ . Une fois construit  $H$  pour  $X = \Delta_p$ , on obtient  $H$  pour  $X$  quelconque en posant, pour tout  $\sigma \in S_p(X)$ ,  $H_p(\sigma) = \sigma \circ H_p(i_p)$ . En effet,  $\partial_{p+1} H\sigma = \partial\sigma \circ H_p(i_p) = \sigma \circ \partial H_p(i_p) = \sigma \circ sd^m(i_p) - \sigma \circ i_p - \sigma \circ H_{p-1}\partial i_p = sd^m(\sigma) - \sigma - H\partial\sigma$ . Par construction, les images des simplexes singuliers qui composent  $H\sigma$  sont inclus dans les images des simplexes singuliers qui composent  $\sigma$ .

- 3) Notons  $S^{\mathcal{U}}(X)$  le sous-complexe de  $S(X)$  engendré par les simplexes singuliers à image dans  $\dot{A}$  ou à image dans  $X \setminus \bar{U}$ . Alors l'inclusion  $S^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S(X)$  induit un isomorphisme en homologie. En considérant la suite exacte longue associée à la suite courte  $0 \rightarrow S^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S(X) \rightarrow S(X)/S^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow 0$ , on s'aperçoit qu'il suffit de montrer que  $H(S(X)/S^{\mathcal{U}}(X)) = 0$ .

Soit  $c_p \in S(X)$  tel que  $\partial c_p \in S^{\mathcal{U}}(X)$ . D'après la première étape, il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $sd^m(c_p) \in S^{\mathcal{U}}(X)$ . D'après la deuxième,  $sd^m(c_p) - c_p = \partial H(c_p) + H\partial(c_p)$ . Or par construction de  $H$ , si  $\partial c_p \in S^{\mathcal{U}}(X)$ , alors  $H(\partial c_p) \in S^{\mathcal{U}}(X)$ . Ainsi, modulo  $S^{\mathcal{U}}(X)$ ,  $c_p = -\partial H(c_p)$ . On a donc montré que si  $c_p$  est un cycle modulo  $S^{\mathcal{U}}(X)$ , c'est un bord modulo  $S^{\mathcal{U}}(X)$ .

- 4) Le morphisme induit par l'inclusion  $S_p(X \setminus U) \rightarrow S_p^{\mathcal{U}}(X)/S_p(A)$  est surjectif puisque les simplexes singuliers qui engendrent  $S_p^{\mathcal{U}}(X)$  sont soit à image dans  $A$  soit à image dans  $X \setminus U$ . De plus, le noyau de ce morphisme est exactement  $S_p(A \setminus U)$  puisqu'un simplexe singulier à image dans  $X \setminus U$  et dans  $A$  est à image dans  $A \setminus U$ . On a donc un isomorphisme entre  $S_p(X \setminus U)/S_p(A \setminus U)$  et  $S_p^{\mathcal{U}}(X)/S_p(A)$  et cet isomorphisme vaut pour tout  $p$ , donc les groupes d'homologie sont également isomorphes. Puis l'inclusion de  $S_p^{\mathcal{U}}(X)/S_p(A)$  dans  $S_p(X)/S_p(A)$  induit un isomorphisme en homologie d'après le lemme des cinq isomorphismes puisque c'est le cas pour l'inclusion de  $S^{\mathcal{U}}(X)$  dans  $S(X)$  et qu'on a les deux suites exactes

$$\begin{aligned}\cdots \rightarrow H_p(S(A)) \rightarrow H_p(S^{\mathcal{U}}(X)) \rightarrow H_p(S^{\mathcal{U}}(X)/S(A)) \rightarrow H_{p-1}(S(A)) \rightarrow H_{p-1}(S^{\mathcal{U}}(X)) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_p(S(A)) \rightarrow H_p(S(X)) \rightarrow H_p(S(X)/S(A)) \rightarrow H_{p-1}(S(A)) \rightarrow H_{p-1}(S(X)) \rightarrow \cdots\end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.63.** *Pour tout entier naturel  $n$ ,  $H_0(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z} \simeq H_n(\mathbb{S}^n)$  tandis que  $H_p(\mathbb{S}^n) \simeq \{0\}$  pour  $p \notin \{0, n\}$ . De même,  $H_n(B^n, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$  et  $H_p(B^n, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \{0\}$  dès que  $p$  est différent de  $n$ .*

*Démonstration.* D'après le Corollaire 3.60,  $B^n$  est acyclique. En considérant la suite longue associée à la paire  $(B^n, \mathbb{S}^{n-1})$ , on obtient

$$\cdots \rightarrow H_p(B^n) \rightarrow H_p(B^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{p-1}(B^n) \rightarrow \cdots$$

et on en déduit que  $H_0(B^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$  et que pour tout  $p > 0$ ,  $H_p(B^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1})$  est un isomorphisme. Or, en choisissant une hémisphère  $\mathbb{S}_+^{n-1}$  de  $\mathbb{S}^{n-1}$  et en considérant la suite longue associée à cette paire, on obtient

$$\cdots \rightarrow H_p(\mathbb{S}_+^{n-1}) \rightarrow H_p(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_p(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}_+^{n-1}) \rightarrow H_{p-1}(\mathbb{S}_+^{n-1}) \rightarrow H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \cdots$$

Comme  $\mathbb{S}_+^{n-1}$  est acyclique,  $H_{p-1}(\mathbb{S}_+^{n-1}) \rightarrow H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1})$  est injectif et on en déduit que pour tout  $p > 0$ ,  $H_p(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq H_p(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}_+^{n-1}) \xrightarrow{\text{excision}} H_p(B^{n-1}, \mathbb{S}^{n-2})$ . Par récurrence, on en déduit que  $H_p(\mathbb{S}^n) \simeq H_0(\mathbb{S}^{n-p})$  si  $p \leq n$  et que  $H_p(\mathbb{S}^n) \simeq H_{p-n}(\mathbb{S}^0)$  si  $p > n$ , d'où le résultat.  $\square$

**Théorème 3.64** (Suite de Mayer-Vietoris). *Soit  $X$  un espace topologique et  $U$  et  $V$  deux ouverts qui recouvrent  $X$ . Alors on a une suite exacte longue en homologie*

$$\cdots \rightarrow H_p(U \cap V) \xrightarrow{\alpha_p} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{\beta_p} H_p(X) \rightarrow H_{p-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

où  $\alpha_p([c_p]) = ([c_p], [-c_p])$  et  $\beta_p([c_p], [d_p]) = [c_p] + [d_p]$ .

*Démonstration.* On note à nouveau  $S^{\mathcal{U}}(X)$  le sous-complexe de  $S(X)$  engendré par les simplexes singuliers de  $X$  à image dans  $U$  ou dans  $V$ . Alors, la suite courte de Mayer-Vietoris  $0 \rightarrow S(U \cap V) \xrightarrow{\alpha_p} S(U) \oplus S(V) \xrightarrow{\beta_p} S^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow 0$  est exacte. En effet  $\alpha_p$  est clairement injective et  $\beta_p$  est clairement surjective. D'autre part, il est clair que  $\beta_p \circ \alpha_p$  s'annule. Si  $\beta_p([c_p], [d_p]) = 0$ , alors  $[c_p] = -[d_p]$ , donc  $c_p$  et  $d_p$  sont à valeurs dans  $U \cap V$ , d'où  $([c_p], [d_p]) = \alpha_p([c_p])$  et l'exactitude. On en déduit alors la suite longue associée en homologie et le résultat découle de la troisième étape de la démonstration du Théorème 3.62, l'inclusion  $S^{\mathcal{U}}(X)$  dans  $S(X)$  induisant un isomorphisme en homologie d'après cette étape.  $\square$

### 3.3.2 Théorème de de Rham

Lorsque  $M$  est une variété différentielle, on peut considérer de la même façon les simplexes singuliers lisses, c-à-d de la forme  $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow M$  où  $\sigma_p$  est une application lisse définie dans un voisinage de  $\Delta_p$  dans le sous-espace affine de dimension  $p$  qui le contient. On note  $S_p^l(X)$  le groupe abélien libre engendré par ces  $p$ -simplexes

singuliers lisses. On obtient comme au §3.3.1 un complexe de chaînes singulières lisses

$$\cdots \rightarrow S_{p+1}^l(M) \rightarrow S_p^l(M) \rightarrow S_{p-1}^l(M) \rightarrow \cdots$$

Considérons alors l'application

$$\begin{aligned} \psi^p : \Omega^p(M) &\rightarrow S_l^p(M, \mathbb{R}) \\ \omega &\mapsto \left( \int : \sum_{i \in I} a_i \sigma_i \mapsto \sum_{i \in I} a_i \int_{\Delta_p} \sigma_i^* \omega \right) \end{aligned}$$

où l'on a noté  $S_l^p(M, \mathbb{R}) := \text{Hom}(S_p^l(M), \mathbb{R})$ .

**Lemme 3.65.** *Le morphisme  $\psi^* : \Omega^*(M) \rightarrow S_l^*(M, \mathbb{R})$  est une application de cochaînes.*

*Démonstration.* Pour toute  $(p-1)$ -forme  $\omega$  et tout  $p$ -simplexe singulier lisse  $\sigma$  de  $M$ ,  $\psi^p(d^{p-1}\omega)(\sigma) = \int_{\Delta_p} \sigma^*(d^{p-1}\omega) = \int_{\Delta_p} d^{p-1}\sigma^*\omega = \int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega = \psi^{p-1}(\omega)(\partial\sigma)$ .  $\square$

**Théorème 3.66** (Théorème de de Rham). *Soit  $M$  une variété différentielle qui possède un recouvrement par un nombre fini d'ouverts dont les intersections sont soit vides soit difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\psi^*$  induit un isomorphisme entre  $H_{dR}^*(M, \mathbb{R})$  et  $H_l^*(M, \mathbb{R})$  et d'autre part  $H_l^*(M, \mathbb{R})$  et  $H^*(M, \mathbb{R})$  sont canoniquement isomorphes.*

(On a noté  $H_{dR}$  la cohomologie de de Rham de  $M$ ,  $H$  la cohomologie singulière et  $H_l^*$  la cohomologie singulière lisse).

*Démonstration.* Démontrons ce théorème par récurrence sur le nombre d'ouverts. S'il n'y a qu'un ouvert,  $M \simeq \mathbb{R}^n$  et d'après le Corollaire 3.60 et son analogue en homologie lisse, les groupes  $H_l^*(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $H^*(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $H_{dR}^*(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  sont tous canoniquement isomorphes à  $\mathbb{R}$  en degré 0 et nuls en degré non nul.

On procède comme dans la preuve du Corollaire 3.10 et on écrit  $M = U \cup V$  avec  $U$ ,  $V$  et  $U \cap V$  qui vérifient l'hypothèse de récurrence. Les suites longues de Mayer-Vietoris s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{dR}^{p-1}(U, \mathbb{R}) \oplus H_{dR}^{p-1}(V, \mathbb{R}) &\rightarrow H_{dR}^{p-1}(U \cap V, \mathbb{R}) \rightarrow H_{dR}^p(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_{dR}^p(U, \mathbb{R}) \oplus H_{dR}^p(V, \mathbb{R}) \rightarrow H_{dR}^p(U \cap V, \mathbb{R}) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_l^{p-1}(U, \mathbb{R}) \oplus H_l^{p-1}(V, \mathbb{R}) &\rightarrow H_l^{p-1}(U \cap V, \mathbb{R}) \rightarrow H_l^p(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_l^p(U, \mathbb{R}) \oplus H_l^p(V, \mathbb{R}) \rightarrow H_l^p(U \cap V, \mathbb{R}) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H^{p-1}(U, \mathbb{R}) \oplus H^{p-1}(V, \mathbb{R}) &\rightarrow H^{p-1}(U \cap V, \mathbb{R}) \rightarrow H^p(M, \mathbb{R}) \rightarrow H^p(U, \mathbb{R}) \oplus H^p(V, \mathbb{R}) \rightarrow H^p(U \cap V, \mathbb{R}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, les groupes  $H_{dR}^*(U, \mathbb{R}) \oplus H_{dR}^*(V, \mathbb{R})$ ,  $H_l^*(U, \mathbb{R}) \oplus H_l^*(V, \mathbb{R})$  et  $H^*(U, \mathbb{R}) \oplus H^*(V, \mathbb{R})$  sont canoniquement isomorphes. Il en va de même des groupes  $H_{dR}^*(U \cap V, \mathbb{R})$ ,  $H_l^*(U \cap V, \mathbb{R})$  et  $H^*(U \cap V, \mathbb{R})$  et on conclut par le lemme des cinq isomorphismes puisque les diagrammes fournis par ces isomorphismes sont commutatifs. Enfin, si le résultat est démontré pour  $m$  ouverts et que  $M = U_1 \cup \cdots \cup U_{m+1}$  est un recouvrement de  $M$  par  $m+1$  ouverts qui satisfont l'hypothèse de récurrence. Alors, on pose  $V = U_1 \cup \cdots \cup U_m$  et on applique ce qui précède à  $V$  et  $U_{m+1}$  pour en déduire le résultat.  $\square$

On se limite dans ce cours aux variétés  $M$  qui possèdent un recouvrement par un nombre fini d'ouverts dont les intersections sont soit vides soit difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ , voir [1], mais ce Théorème 3.66 reste valable en général.

**Théorème 3.67.** *Soit  $K$  un complexe simplicial. Alors ses homologies simpliciales et singulières coïncident. Si  $L$  est un sous-complexe de  $K$ , il en est de même pour les homologies relatives à  $L$ .*

*Démonstration.* On ne traite que le cas où  $K$  est fini. On notera  $H^{simp}$  l'homologie simpliciale et  $H$  l'homologie singulière. Munissons les sommets de  $K$  d'un ordre total. Chaque simplexe  $\sigma$  de  $K$  possède alors une orientation induite par cet ordre. Le complexe de chaînes simpliciales se trouve ainsi équipé d'une base. Posons alors

$$\begin{array}{ccc} \psi : & C(K) & \rightarrow S(K) \\ & \sigma = [v_0, \dots, v_n] & \mapsto \left( \begin{array}{ccc} \psi(\sigma) : & \Delta_p & \rightarrow [v_0, \dots, v_n] \subset K \\ & e_i & \mapsto v_i \end{array} \right) \end{array}$$

que l'on prolonge de manière affine. Alors  $\psi$  induit un isomorphisme en homologie. Si  $K$  est de dimension 0, cela résulte du Corollaire 3.60. Si  $K$  est de dimension  $> 0$ , on procède par récurrence sur le nombre de simplexes de dimensions strictement positives. Soit  $\sigma$  un simplexe de dimension maximale de  $K$ . Alors  $\sigma$  avec toutes ses faces est un sous-complexe de  $K$ . Les suites exactes longues associées à la paire  $(K, \sigma)$  s'écrivent

$$\cdots \rightarrow H_{p+1}(K, \sigma) \rightarrow H_p(\sigma) \rightarrow H_p(K) \rightarrow H_p(K, \sigma) \rightarrow H_{p-1}(\sigma) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow H_{p+1}^{simp}(K, \sigma) \rightarrow H_p^{simp}(\sigma) \rightarrow H_p^{simp}(K) \rightarrow H_p^{simp}(K, \sigma) \rightarrow H_{p-1}^{simp}(\sigma) \rightarrow \cdots$$

Comme  $\sigma$  est contractile, d'après l'Exercice 3.58 pour le degré 0 et le Corollaire 3.60 pour les degrés non nuls, les homologies singulières et simpliciales de  $\sigma$  coïncident. D'après le lemme des cinq isomorphismes, il suffit donc de montrer que le morphisme  $\psi : H_*^{simp}(K, \sigma) \rightarrow H_*(K, \sigma)$  est un isomorphisme. Le théorème d'excision en homologie simpliciale (Théorème 3.50) s'applique avec  $M = \hat{\sigma}$  de sorte que  $H_*^{simp}(K, \sigma) \simeq H_*^{simp}(K \setminus \hat{\sigma}, \partial\sigma)$ . De même, le théorème d'excision en homologie singulière (Théorème 3.62) s'applique avec  $U = \hat{\sigma}$  le barycentre de  $\sigma$  et  $A = \sigma$  car  $\sigma$  est de dimension maximale. On en déduit l'isomorphisme  $H_*(K, \sigma) \simeq H_*(K \setminus \hat{\sigma}, \sigma \setminus \hat{\sigma})$ . Or la paire  $(K \setminus \hat{\sigma}, \sigma \setminus \hat{\sigma})$  se rétracte par déformation sur la paire  $(K \setminus \hat{\sigma}, \partial\sigma)$  de sorte que par le Corollaire 3.60,  $H_*(K, \sigma) \simeq H_*(K \setminus \hat{\sigma}, \partial\sigma)$ . L'hypothèse de récurrence s'applique à la paire  $(K \setminus \hat{\sigma}, \partial\sigma)$  et on en déduit que  $H_*^{simp}(K, \sigma) \simeq H_*(K, \sigma)$  puis d'après le lemme des cinq que  $H_*^{simp}(K) \simeq H_*(K)$ . Pour tout sous-complexe  $L$  de  $K$ , le morphisme induit en homologie relative un isomorphisme  $\psi : H_*^{simp}(K, L) \rightarrow H_*(K, L)$  d'après le lemme des cinq isomorphismes appliqué aux suites exactes longues associées à la paire  $(K, L)$ .  $\square$

## 3.4 Homologie cellulaire

### 3.4.1 Complexe cellulaire

**Définition 3.68.** On appelle cellule de dimension  $n$  tout espace topologique homéomorphe à la boule fermée  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$ . On appelle cellule ouverte de dimension  $n$  tout espace topologique homéomorphe à l'intérieur de cette boule.

**Définition 3.69.** Un complexe cellulaire ou CW-complexe est un espace topologique séparé  $X$  qui est réunion disjointe de cellules ouvertes  $(e_i)_{i \in I}$ . De plus, pour chaque cellule ouverte  $e_i$ , il existe une application d'attachement  $f_i : B^{n_i} \rightarrow X$  telle que  $(f_i)|_{\dot{B}^{n_i}}$  est un homéomorphisme entre  $\dot{B}^{n_i}$  et  $e_i$  et telle que  $f_i(\partial B^{n_i})$  est une réunion finie de cellules de  $X$  de dimensions inférieures à  $n_i$ . Enfin la topologie sur  $X$  coïncide avec la topologie faible, de sorte qu'un sous-ensemble  $A$  de  $X$  est fermé si et seulement si  $A \cap \bar{e}_i$  est fermé dans  $\bar{e}_i$ , donc dans  $X$ , pour tout  $i \in I$ .

*Exemple 3.70.*

1. La sphère  $S^n$  est réunion de deux cellules, une de dimension  $n$  et l'autre de dimension 0.
2. L'espace projectif réel  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}P^{n-1}$  est un CW-complexe possédant une cellule en chaque dimension comprise entre 0 et  $n$ .
3. L'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^n \sqcup \mathbb{C}P^{n-1}$  est un CW-complexe possédant une cellule en chaque dimension paire comprise entre 0 et  $2n$ .
4. Tout complexe simplicial est un CW-complexe.
5. La cellulation duale de la subdivision barycentrique d'un complexe simplicial équipe ce complexe simplicial d'une structure de CW-complexe, voir la Définition 3.55.

**Définition 3.71.** Un sous-complexe  $Y$  d'un CW-complexe  $X$  est un fermé de  $X$  qui est réunion de cellules et qui contient les adhérences de toutes ses cellules. Le squelette  $X^k$  de  $X$  est la réunion de toutes les cellules de dimensions inférieures ou égales à  $k$  de  $X$ .

### 3.4.2 Homologie cellulaire

Soit  $X$  un CW-complexe. Pour tout entier naturel  $p$ , on pose  $D_p(X) = H_p(X^p, X^{p-1})$ .

**Lemme 3.72.** Le groupe  $D_p(X)$  est un groupe abélien libre dont une base est formée des cellules de dimension  $p$  de  $X$ , chacune étant munie d'une orientation.

*Démonstration.* Notons  $\{e_i, i \in I^p\}$  l'ensemble des cellules de dimension  $p$  de  $X$ . Par définition  $X^p = X^{p-1} \cup \left( \bigcup_{i \in I^p} e_i \right)$ . Soit  $\hat{e}_i$  un point intérieur à  $e_i$ . Alors,



$X^p \setminus (\bigcup_{i \in I^p} \hat{e}_i)$  se rétracte par déformation sur  $X^{p-1}$ , de sorte que  $H_p(X^p, X^{p-1}) \simeq H_p(X^p, X^p \setminus (\bigcup_{i \in I^p} \{\hat{e}_i\}))$ . À présent, l'application d'attachement  $f : \bigsqcup_{i \in I^p} B^p \rightarrow X^p$  des cellules de dimension  $p$  induit par excision un isomorphisme  $f_* : H_p(\bigsqcup_{i \in I^p} B^p, \bigsqcup_{i \in I^p} (B^p \setminus \{0\})) \rightarrow H_p(X^p, X^p \setminus (\bigcup_{i \in I^p} \{\hat{e}_i\}))$ , d'où l'on déduit  $H_p(X^p, X^{p-1}) \simeq \bigoplus_{i \in I^p} H_p(B^p, \partial B^p)$  puisque  $B^p \setminus \{0\}$  se rétracte par déformation sur  $\partial B^p$ . D'après le Corollaire 3.63,  $H_p(B^p, \partial B^p) \simeq \mathbb{Z}$  et le choix d'un tel isomorphisme est donné par une orientation de la boule.  $\square$

Soit  $\partial_p : D_p(X) \rightarrow D_{p-1}(X)$  la composée  $j_* \circ \partial_*$  où  $j_*$  et  $\partial_*$  sont définis par

$$D_p(X) = H_p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(X^{p-1}) \xrightarrow{j_*} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) = D_{p-1}(X).$$

**Lemme 3.73.** *Pour tout  $p \geq 1$ ,  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ .*

*Démonstration.* Par définition,  $\partial^2 = j_* \circ (\partial_* \circ j_*) \circ \partial_*$ . Or la suite

$$\dots \rightarrow H_p(X^p) \xrightarrow{j_*} H_p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(X^{p-1}) \rightarrow \dots$$

est exacte, de sorte que la composée  $\partial_* \circ j_*$  s'annule. Ainsi,  $\partial^2 = 0$ .  $\square$

En fait, cette homologie cellulaire ressemble à l'homologie simpliciale. Chaque cellule  $e_i$  de dimension  $p$  est attachée au  $(p-1)$ -squelette au même titre qu'un  $p$ -simplexe l'est dans un complexe simplicial. L'application d'attachement est donné ici par une application continue  $f_i : (B_p, \partial B_p) \rightarrow (X_p, X_{p-1})$  qui induit un morphisme injectif de  $H_p(B_p, \partial B_p)$  dans  $D_p(X)$  dont l'image est un des facteurs de  $D_p(X)$ . Or, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H_p(B^p, \partial B^p) & \xrightarrow{(f_i)_*} & D_p(X) \\ \downarrow (p>0) \simeq & & \downarrow (\partial)_* \\ H_{p-1}(\partial B^p) & \xrightarrow{(f_i)_*} & D_{p-1}(X) \xrightarrow{\simeq} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) \\ & & \downarrow \simeq \\ & & H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-1} \setminus \bigcup_{j \in I^{p-1}} \{\hat{e}_j\}) \end{array}$$

Le bord  $\partial_p$  décrit la façon dont la cellule  $e_i$  de dimension  $p$  est attachée aux cellules de dimension  $p-1$ . Il est donné pour tout  $j \in I^{p-1}$  par le morphisme  $\mathbb{Z} \simeq H_{p-1}(\partial B^p) \rightarrow H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-1} \setminus \{\hat{e}_j\}) \simeq \mathbb{Z}$ .

**Définition 3.74.** Soit  $X$  un CW-complexe dont les cellules sont munies d'une orientation. On appelle indice d'incidence de  $e_i$  par rapport à  $e_j$ , où  $e_i$  est une  $p$ -cellule et  $e_j$  une  $(p-1)$ -cellule, l'entier, noté  $[e_i : e_j]$ , tel que le morphisme  $(f_i)_*$  de  $H_{p-1}(\partial B^p)$  dans  $H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-1} \setminus \{\hat{e}_j\})$  soit donné par la multiplication par  $[e_i : e_j]$  via les identifications  $\mathbb{Z} \simeq H_{p-1}(\partial B^p)$  et  $\mathbb{Z} \simeq H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-1} \setminus \{\hat{e}_j\})$ .

Ainsi, le choix des orientations sur les cellules fournit une base de  $D_p(X)$  pour tout entier naturel  $p$  et la matrice de  $\partial_p$  dans cette base est la matrice  $([e_i : e_j])_{i,j}$ .

*Exemple 3.75.* 1. Si  $X = \mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 1$ , alors  $D_p(X) \simeq \mathbb{Z}$  si  $p \in \{0, n\}$  et  $D_p(X) = \{0\}$  sinon. D'autre part,  $\partial_p = 0$  (exercice si  $n = 1$ ) de sorte que  $H_p(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$  si  $p \in \{0, n\}$  et  $H_p(\mathbb{S}^n) = \{0\}$  sinon.

2. Si  $X = \mathbb{C}P^n \simeq \mathbb{C}^n \sqcup \mathbb{C}P^{n-1}$ ,  $D_p(X) \simeq \mathbb{Z}$  si  $p$  est pair et  $D_p(X) = 0$  sinon. Ainsi  $\partial_p = 0$  et  $H_p(\mathbb{C}P^n) \simeq \mathbb{Z}$  si  $p$  est pair et  $H_p(\mathbb{C}P^n) = 0$  sinon.

3. Si  $K$  est un complexe simplicial, alors  $K$  est un CW-complexe et on vérifie que  $D(X) = C(X)$ , de sorte que homologies simpliciale et cellulaire coïncident.

4. Si  $X = \mathbb{R}P^n \simeq \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}P^{n-1}$ , alors  $D_p(X) \simeq \mathbb{Z}$  pour tout  $p$  compris entre 0 et  $n$ . On laisse en exercice le fait que  $\partial_p$  est la multiplication par 2 si  $p$  est pair et l'application nulle si  $p$  est impair. Que vaut  $H_p(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z})$  et  $H_p(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  ?

**Théorème 3.76.** Les homologies cellulaire et singulière d'un CW-complexe de dimension finie coïncident.

*Démonstration.* On notera  $H_*$  les groupes d'homologie singulière et  $H_*^{cell}$  les groupes d'homologie cellulaire.

On procède par récurrence sur la dimension du CW-complexe  $X$ . Si la dimension est nulle, les homologies coïncident. Si on suppose que les homologies coïncident pour un CW-complexe de dimension  $m-1$  et si  $X$  est de dimension  $m$ , la suite exacte longue associée à la paire  $(X^m, X^{m-1})$  s'écrit

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{p+1}(X^m, X^{m-1}) & \longrightarrow & H_p(X^{m-1}) & \longrightarrow & H_p(X^m) \longrightarrow H_p(X^m, X^{m-1}) \longrightarrow \cdots \\ & & \simeq \downarrow & & & & \downarrow \simeq \\ & & \bigoplus_{i \in I^m} H_{p+1}(B^m, \partial B^m) & & & & \bigoplus_{i \in I^m} H_p(B^m, \partial B^m) \end{array}$$

On en déduit que  $H_p(X^{m-1}) = H_p(X^m)$  pour  $p$  différent de  $m$  et  $m-1$ . En particulier, les homologies singulières et cellulaire coïncident pour  $p > m$  et pour  $p < m-1$ . On en déduit également que  $H_m(X^{m-1}) = H_m(X^{m-2}) = \cdots = H_m(X^0) = 0$ . Pour  $p = m-1$ , on réécrit la suite longue

$$0 \rightarrow H_m(X^m) \rightarrow H_m(X^m, X^{m-1}) \rightarrow H_{m-1}(X^{m-1}) \rightarrow H_{m-1}(X^m) \rightarrow 0.$$

Puisque  $H_{m-1}(X^{m-2}) = 0$ , on a également la suite

$$0 \rightarrow H_{m-1}(X^{m-1}) \rightarrow H_{m-1}(X^{m-1}, X^{m-2}) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

ce qui permet d'identifier  $H_{m-1}(X^{m-1})$  à  $Z_{m-1}^{cell}(X^m)$ . On en déduit alors que  $H_m(X^m) = Z_m^{cell}(X^m) = H_m^{cell}(X^m)$  et  $H_{m-1}(X^m) = Z_{m-1}(X^m)/\partial(D_m(X^m)) = H_{m-1}^{cell}(X^m)$ .  $\square$

### 3.4.3 Dualité de Poincaré, seconde version

**Théorème 3.77.** *Soit  $M$  une variété compacte orientée de dimension  $n$  et  $G$  un groupe abélien (ou  $A$ -module). Alors, pour tout entier naturel  $p$ , on a l'isomorphisme*

$$H_p(M, G) \simeq H^{n-p}(M, G).$$

*Si  $M$  n'est pas orientable, ce résultat reste valable dans le cas particulier où  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Munissons  $M$  d'une triangulation  $\tau$  fournie par la méthode de Whitney, voir le Théorème 3.41. On considère alors la subdivision barycentrique de cette triangulation et la cellulation duale de  $\tau$  associée, voir la Définition 3.55. La variété  $M$  hérite ainsi d'une structure de complexe simplicial  $K$  et d'une structure de CW-complexe  $X$ , tous deux de dimension  $n$ . De plus, il y a une bijection entre les simplexes  $\sigma$  de  $K$  et les cellules  $D(\sigma)$  de  $X$ . Si  $\sigma$  est de dimension  $p$ ,  $D(\sigma)$  est de dimension  $n-p$  et rencontre « transversalement »  $\sigma$  en un point. Comme  $M$  est orientée, le choix d'une orientation de  $\sigma$  induit une orientation de  $D(\sigma)$  de sorte que l'orientation de  $M$  coïncide avec l'orientation induite par la concaténation de celles de  $\sigma$  et de  $D(\sigma)$ .

On en déduit un isomorphisme  $C^p(K) \rightarrow D_{n-p}(X)$  puisque ce sont des groupes abéliens libres engendrés par les  $p$ -simplexes orientés et les cellules orientées de dimension  $n-p$  respectivement. On en déduit également un isomorphisme  $C^p(K) \otimes G \rightarrow D_{n-p}(X) \otimes G$ . Or  $C^p(K)$  est libre, donc  $C^p(K) \otimes G \simeq \text{Hom}(C^p(K), G) = C^p(K, G)$  et  $D_{n-p}(X) \otimes G = D_{n-p}(X, G)$ . On peut modifier cet isomorphisme en ajoutant un signe  $\epsilon(p)$  qui ne dépend que de la dimension  $p$  (et de  $n$ ) et en posant

$$\begin{aligned} \psi_\epsilon^p : C^p(K, G) &\rightarrow D_{n-p}(X, G) \\ \sigma^* &\mapsto \epsilon(p)D(\sigma) \end{aligned}$$

où  $\sigma^*$  est la cochaîne indicatrice de  $\sigma$ . Il reste à voir qu'il existe une distribution de signes  $\epsilon$  telle que  $\partial_{n-p} \circ \psi_\epsilon^p = \psi_\epsilon^{p+1} \circ d^p$ , c'est-à-dire telle que  $\psi_\epsilon$  est un isomorphisme de complexes de chaînes, induisant un isomorphisme en cohomologie.

Or, si  $\sigma^* \in C^p(K)$  est une cochaîne,  $d^p(\sigma)$  est non nulle exactement sur les  $(p+1)$ -simplexes  $\sigma'$  qui ont  $\sigma$  pour face. Tous ces  $(p+1)$ -simplexes sont transverses

au bord de  $D(\sigma)$ . On s'aperçoit alors que l'indice d'intersection  $\partial D(\sigma) \circ \sigma'$  ne dépend pas du choix de  $\sigma$  et  $\sigma'$ , uniquement de la dimension  $p$  de  $\sigma$  et de la dimension  $n$  de  $M$ , c'est une vérification locale. Il existe alors un choix de fonction  $\epsilon$  pour lequel  $\psi_\epsilon$  est un morphisme de complexes de chaînes, d'où le résultat.

Si  $M$  n'est pas orientable et  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , alors il n'est pas nécessaire de tordre la bijection initiale par un signe pour obtenir un isomorphisme de complexes et la dualité de Poincaré.  $\square$

## 4 Faisceaux

Ce paragraphe est consacré aux faisceaux et à leur cohomologie. Le lecteur souhaitant en connaître davantage pourra consulter les ouvrages [6], [9], [3] et [7].

### 4.1 Faisceaux, préfaisceaux et morphismes de faisceaux

**Définition 4.1.** *Un faisceau en groupes abéliens  $\mathcal{F}$  sur un espace topologique  $X$  est la donnée pour tout ouvert  $U$  de  $X$  d'un groupe abélien  $\mathcal{F}(U)$  et pour tout ouvert  $V \subset U$  d'un morphisme de restriction  $r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  qui vérifient les conditions suivantes :*

- 1)  $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$ .
- 2)  $r_{U,U} = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$ .
- 3) Si  $W \subset V \subset U$ , alors  $r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}$ .
- 4) Si  $(V_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $U$  par des ouverts et si  $s \in \mathcal{F}(U)$  est tel que pour tout  $i \in I$ ,  $r_{U,V_i}(s) = 0$ , alors  $s = 0$ .
- 5) Si  $(V_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $U$  par des ouverts et  $(s_i \in \mathcal{F}(V_i))_{i \in I}$  est tel que pour tous  $i$  et  $j$ ,  $r_{V_i, V_i \cap V_j}(s_i) = r_{V_j, V_i \cap V_j}(s_j)$ , alors il existe  $s \in \mathcal{F}(U)$  tel que pour tout  $i \in I$ ,  $r_{U,V_i}(s) = s_i$ .

Lorsque les trois premières conditions sont satisfaites, on parle de *pré-faisceau*. Un élément  $s$  de  $\mathcal{F}(U)$  est appelé *section de  $\mathcal{F}$  au-dessus de  $U$*  et  $r_{U,V}(s)$  est souvent noté  $s|_V$ .

*Exemple 4.2.* 1. Le faisceau des fonctions lisses sur une variété  $M$ .

2. Pour tout entier naturel  $p$ , le faisceau  $\Omega^p(M, \mathbb{R})$  des  $p$ -formes différentielles sur une variété  $M$ .
3. Le faisceau  $\mathbb{C}_X$  des fonctions localement constantes sur un espace topologique  $X$  à valeur dans  $\mathbb{C}$ , où pour tout ouvert  $U$ ,  $\mathbb{C}_X(U)$  est l'ensemble des fonctions localement constantes sur  $U$ .
4. Le faisceau gratte-ciel  $\mathcal{G}_x$ . Soit  $G$  un groupe et  $x \in X$ . Si  $U$  est un ouvert de  $X$  on définit  $\mathcal{G}_x(U) = G$  si  $x \in U$  et  $\mathcal{G}_x(U) = \{0\}$  sinon.

Attention, dans cet Exemple 4.2, si l'on remplace les fonctions localement constantes par les fonctions constantes, on n'obtient pas un faisceau.

**Définition 4.3.** *On appelle fibre d'un faisceau  $\mathcal{F}$  au-dessus d'un point  $x \in X$  la limite directe*

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U).$$

Ainsi, disons que  $s \in \mathcal{F}(U)$  est équivalent à  $s' \in \mathcal{F}(V)$ , où  $U$  et  $V$  sont deux ouverts contenant  $x$ , lorsqu'il existe un ouvert  $W \subset U \cap V$  tel que  $r_{U,W}(s) = r_{V,W}(s')$ . Alors,

$$\mathcal{F}_x = \bigsqcup_{U \ni x} \mathcal{F}(U) / \sim .$$

Les éléments de  $\mathcal{F}_x$  sont appelés les germes de sections de  $\mathcal{F}$  en  $x$ .

**Définition 4.4.** Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont des faisceaux (ou des préfaisceaux) sur  $X$ , un morphisme de faisceaux (ou de préfaisceaux)  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est la donnée pour tout ouvert  $U$  de  $X$  d'un morphisme de groupes  $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  tel que, pour tout  $V \subset U$ , le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ r_{U,V} \downarrow & & \downarrow r'_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow[\varphi_V]{} & \mathcal{G}(V). \end{array}$$

*Exemple 4.5.* Dans le cas du faisceau des  $p$ -formes différentielles sur une variété  $M$ , l'opérateur  $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$  est un morphisme de faisceau.

*Exercice 4.6.* Montrer que  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un isomorphisme de faisceaux si et seulement si pour tout  $x \in X$ ,  $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  est un isomorphisme.

**Proposition 4.7.** Soit  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morphisme de faisceaux sur  $X$ . Alors le noyau de  $\varphi$  est un faisceau sur  $X$  tandis que l'image de  $\varphi$  et son conoyau ne sont en général que des préfaisceaux.

*Démonstration.* Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\text{Ker}(\varphi)(U) = \text{Ker}(\varphi_U)$ . On a donc l'inclusion  $\text{Ker}(\varphi_\emptyset) \subset \mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$ . Puis  $r_{U,U} : \text{Ker}(\varphi_U) \rightarrow \text{Ker}(\varphi_U)$  est la restriction de  $r_{U,U} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  à  $\text{Ker}(\varphi)(U)$ , donc c'est l'identité. De même,  $r_{U,V} : \text{Ker}(\varphi_U) \rightarrow \text{Ker}(\varphi_V)$  est la restriction de  $r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ . Cette restriction à  $\text{Ker}(\varphi)(U)$  est bien à image dans  $\text{Ker}(\varphi)(V)$  d'après la Définition 4.4. On a alors par restriction  $r_{U,W} = r_{V,W}r_{U,V}$  pour toute suite d'ouverts  $W \subset V \subset U$ . Enfin, soit  $(V_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $U$ . Si  $s \in \text{Ker}(\varphi)(U)$  satisfait  $r_{U,V_i}(s) = 0$  pour tout  $i \in I$ , alors  $s = 0$  dans  $\mathcal{F}(U)$  puisque  $\mathcal{F}$  est un faisceau. Donc  $s = 0$  dans  $\text{Ker}(\varphi)(U)$  par restriction. De même, si  $s_i \in \text{Ker}(\varphi)(V_i)$  sont donnés et satisfont  $r_{V_i,V_i \cap V_j}(s_i) = r_{V_j,V_j \cap V_i}(s_j)$ , alors il existe  $s \in \mathcal{F}(U)$  tel que  $r_{U,V_i}(s) = s_i$  puisque  $\mathcal{F}$  est un faisceau. D'après la Définition 4.4, cette section  $s$  est dans  $\text{Ker}(\varphi)(U)$ . En effet, pour tout  $i \in I$ ,  $r_{U,V_i}(\varphi_U(s)) = \varphi_{V_i}(s_i) = 0$ , donc  $\varphi_U(s) = 0$  puisque  $\mathcal{G}$  est un faisceau. Enfin, on montre de la même façon que  $\text{Im}(\varphi)(U)$  et  $\text{Coker}(\varphi)(U) = \mathcal{G}(U)/\text{Im}(\varphi)(U)$  définissent des préfaisceaux.  $\square$

Si  $s \in \text{Im}(\varphi_U)$  satisfait  $r_{U,V_i}(s) = 0$  pour tout  $i \in I$ , alors  $s = 0 \in \mathcal{G}(U)$  car  $\mathcal{G}$  est un faisceau. Par contre, si  $s_i \in \text{Im}(\varphi)(V_i)$  sont donnés et satisfont  $r_{V_i,V_i \cap V_j}(s_i) = r_{V_j,V_j \cap V_i}(s_j)$ , il existe  $s \in \mathcal{G}(U)$  tel que  $r_{U,V_i}(s) = s_i$  mais rien ne garantit que  $s \in \text{Im}(\varphi)(U)$ .

*Exemple 4.8.* 1. Soit  $X = \mathbb{R}$  et  $\mathcal{F} = \mathbb{R}_X$ . On définit le faisceau  $\mathcal{G}$  gratte-ciel en deux points  $\{-1, +1\}$  comme ceci : si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  qui ne contient ni 1 ni -1, alors  $\mathcal{G}(U) = \{0\}$ , si  $U$  ne contient qu'un seul de ces deux points,  $\mathcal{G}(U) = \mathbb{R}$  et si  $U$  contient 1 et -1, alors  $\mathcal{G}(U) = \mathbb{R}^2$ . On définit  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  par restriction. Si  $U \subset \mathbb{R}$  ne contient pas  $\{-1, 1\}$ , alors  $\varphi_U$  est surjectif, mais si  $U$  est connexe et contient  $\{\pm 1\}$ , alors  $\varphi_U$  n'est pas surjectif (merci à Nicolas Vichery pour cet exemple).

2. Si  $X = \mathbb{S}^1$ , on considère le faisceau  $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$  des fonctions complexes continues, où plus précisément  $\mathcal{F}(U) = \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C})$ . On considère également le faisceau  $\mathcal{G} = \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C}^*)$  et le morphisme  $\varphi = \exp : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ . Alors pour tout  $U$  ouvert de  $\mathbb{S}^1$  qui n'est pas  $\mathbb{S}^1$  tout entier,  $\varphi_U$  est surjectif, par contre  $\exp : \mathcal{F}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathcal{G}(\mathbb{S}^1)$  n'est pas surjective.

Toutefois, cette anomalie, complètement liée à la notion de cohomologie comme on va le voir au §4.3.1, est corrigable par la Proposition suivante.

**Proposition 4.9.** *Pour tout préfaisceau  $\mathcal{F}$  sur un espace topologique  $X$ , il existe une unique paire  $(\mathcal{F}^+, \theta)$  à isomorphisme près, où  $\mathcal{F}^+$  est un faisceau sur  $X$  et  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  un morphisme de préfaisceaux, ayant la propriété universelle suivante : pour tout faisceau  $\mathcal{G}$  sur  $X$  et tout morphisme de préfaisceaux  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , il existe un unique morphisme de faisceaux  $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  tel que  $\varphi = \psi \circ \theta$ . Le faisceau  $\mathcal{F}^+$  est appelé faisceau associé au préfaisceau  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* On définit  $\mathcal{F}^+(U)$  comme l'ensemble des fonctions  $s : U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$  qui sont telles que pour tout  $x \in U$ ,  $s(x) \in \mathcal{F}_x$  et il existe un ouvert  $V$  qui contient  $x$ , inclus dans  $U$ , ainsi qu'une section  $t \in \mathcal{F}(V)$  tels que pour tout  $y \in V$ ,  $s(y) = t_y$  ( $t_y$  est l'image de  $t$  dans  $\mathcal{F}_x$ , c-à-d la classe d'équivalence de  $t$ ). Alors, muni de la restriction des applications,  $\mathcal{F}^+$  est un faisceau. En effet, c'est clairement un préfaisceau. De plus, si  $(V_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $U$  et si  $s \in \mathcal{F}^+(U)$  satisfait  $s|_{V_i} = 0$  pour tout  $i \in I$ , alors pour tout  $x \in U$ ,  $s(x) = 0$ , donc  $s = 0$ . Si pour tout  $i \in I$ ,  $s_i \in \mathcal{F}^+(V_i)$  sont donnés et satisfont  $(s_i)|_{V_i \cap V_j} = (s_j)|_{V_j \cap V_i}$ , alors on pose, pour tout  $x \in U$ ,  $s(x) = s_i(x)$  si  $x \in V_i$ . Cette définition ne dépend pas du choix de  $i \in I$  par hypothèse et par définition,  $s \in \mathcal{F}^+(U)$ .

On dispose d'un morphisme de préfaisceaux tautologique  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  qui à une section  $s$  associe la fonction  $\sigma$  telle que  $\sigma(x) = s_x$ . On montre alors que  $(\mathcal{F}^+, \theta)$  vérifie la propriété universelle énoncée. Si  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un morphisme de faisceaux, où  $\mathcal{G}$  est un faisceau, alors il induit un morphisme  $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ . En effet,

si  $U \subset X$  est un ouvert et si  $s \in \mathcal{F}^+(U)$ , alors par définition, pour tout  $x \in U$ , il existe un ouvert  $V$  contenant  $x$  et une section  $t \in \mathcal{F}(V)$  tels que pour tout  $y \in V$ ,  $s(y) = t_y$ . Alors  $\varphi(t) \in \mathcal{G}(V)$ . On en déduit un recouvrement ouvert  $(V_i)_{i \in I}$  de  $U$  et des sections  $u_i = \varphi(t_i) \in \mathcal{G}(V_i)$  qui satisfont  $(u_i)|_{V_i \cap V_j} = (u_j)|_{V_i \cap V_j}$ . Comme  $\mathcal{G}$  est un faisceau, il existe un unique  $u \in \mathcal{G}(U)$  tel que pour tout  $i \in I$ ,  $u|_{V_i} = u_i$ . On pose  $\psi(s) = u$ . Le morphisme  $\psi$  est bien défini puisque  $u$  ne dépend pas des choix de  $u_i$  et  $V_i$ . Par construction,  $\varphi = \psi \circ \theta$ .

Enfin on vérifie l'unicité de  $(\mathcal{F}^+, \theta)$ . Celle-ci découle de la propriété universelle. Si  $(\mathcal{F}^-, \theta^-)$  est un autre couple, il existe  $\psi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{F}^-$  et  $\psi^- : \mathcal{F}^- \rightarrow \mathcal{F}^+$  tels que  $\theta = \psi^- \circ \theta^-$  et  $\theta^- = \psi^+ \circ \theta$ . Alors  $\theta = \psi^- \circ \psi^+ \circ \theta$ . Or on a aussi  $\theta = Id \circ \theta$ , donc par unicité,  $\psi^- \circ \psi^+ = Id$ . De même  $\psi^+ \circ \psi^- = Id$ , de sorte que  $(\mathcal{F}^+, \theta)$  et  $(\mathcal{F}^-, \theta^-)$  sont isomorphes.  $\square$

**Définition 4.10.** Si  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un morphisme de faisceaux, on appelle image de  $\varphi$  le faisceau associé au préfaisceau  $Im(\varphi)$  et faisceau conoyau le faisceau associé au préfaisceau  $Coker(\varphi)$ . Le morphisme est dit surjectif si  $Im(\varphi)^+ = \mathcal{G}$ . De même, on appelle faisceau quotient d'un faisceau  $\mathcal{G}$  par un sous-faisceau  $\mathcal{F}$  le faisceau associé au préfaisceau  $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ .

*Remarque 4.11.* On a vu dans les exemples précédents que si  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un morphisme de faisceaux surjectif, alors  $\varphi_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  n'est pas nécessairement surjectif.

*Exercice 4.12.* Montrer qu'un morphisme de faisceaux est surjectif si et seulement si le morphisme induit au niveau des fibres est surjectif.

Une suite de faisceaux sur  $X$

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}^{p-1} \xrightarrow{\varphi^{p-1}} \mathcal{F}^p \xrightarrow{\varphi^p} \mathcal{F}^{p+1} \rightarrow \dots$$

est dite exacte lorsque  $Ker(\varphi^p) = Im(\varphi^{p-1})^+$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ .

*Exercice 4.13.* Montrer qu'une suite de faisceaux est exacte si et seulement si elle l'est au niveau des fibres.

## 4.2 Cohomologie de Čech d'un faisceau

Cette partie est largement inspirée de [9].

### 4.2.1 Définition

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau en groupes abéliens sur un espace topologique  $X$ . Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts. Pour tout entier naturel  $p$ , on



note  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  l'ensemble des suites de sections

$$s = (s_{i_0, \dots, i_p})_{\substack{i_0, \dots, i_p \\ i_k \neq i_l}} \in \prod_{\substack{i_0, \dots, i_p \\ i_k \neq i_l}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}),$$

vérifiant la condition combinatoire suivante :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{p+1}, s_{i_{\sigma(0)}, \dots, i_{\sigma(p)}} = \epsilon(\sigma) s_{i_0, \dots, i_p}.$$

C'est le groupe des cochaînes de Čech associé au recouvrement  $\mathcal{U}$ .

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\begin{aligned} d^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \\ s = (s_{i_0, \dots, i_p})_{\substack{i_0, \dots, i_p \\ i_k \neq i_l}} &\mapsto (\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}})_{\substack{j_0, \dots, j_{p+1} \\ j_k \neq j_l}} \end{aligned}$$

où  $\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i (s_{j_0, \dots, \hat{j}_i, \dots, j_{p+1}})|_{U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_{p+1}}}$  et  $\hat{j}_i$  signifie que l'on a enlevé l'indice  $j_i$ .

*Exercice 4.14.* Vérifier que pour toute permutation  $\theta$  de  $\mathfrak{S}_{p+2}$ , on a l'égalité

$$\sigma_{j_{\theta(0)}, \dots, j_{\theta(p+1)}} = \epsilon(\theta) \sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}},$$

de sorte que  $d^p$  est bien défini.

**Lemme 4.15.** *Pour tout entier naturel  $p$ ,  $d^{p+1} \circ d^p = 0$ .*

*Démonstration.* C'est la même vérification combinatoire que celle effectuée dans la démonstration du Lemme 3.46.  $\square$

On a donc associé à tout faisceau  $\mathcal{F}$  un complexe de Čech

$$\dots \rightarrow C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^{p-1}} C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^p} C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

dont l'homologie, notée  $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ , est appelée cohomologie de Čech associée au recouvrement  $\mathcal{U}$  et à coefficients dans  $\mathcal{F}$ . Ces groupes dépendent de  $\mathcal{U}$ . Toutefois,

**Proposition 4.16.** *Pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  et tout recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $X$  par des ouverts,  $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ , l'espace des sections globales.*

*Démonstration.* On introduit le morphisme  $\epsilon : \mathcal{F}(X) \mapsto C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  que l'on définit par  $\epsilon(s) = (s_i)_{i \in I}$  où  $s_i = s|_{U_i}$ . Alors  $d^0 \circ \epsilon = 0$ . En effet, si  $s \in \mathcal{F}(X)$  est une section, alors  $d^0 \circ \epsilon(s) = (\sigma_{i_0, i_1})_{i_0 \neq i_1}$  avec  $\sigma_{i_0, i_1} = (s_{i_1})|_{U_{i_0} \cap U_{i_1}} - (s_{i_0})|_{U_{i_0} \cap U_{i_1}} = s|_{U_{i_0} \cap U_{i_1}} - s|_{U_{i_0} \cap U_{i_1}}$ , donc  $d^0 \circ \epsilon(s) = 0$  et  $\epsilon$  est à valeurs dans  $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

Il ne reste qu'à montrer qu' $\epsilon$  est un isomorphisme. D'après la quatrième propriété des faisceaux donnée par la définition 4.1, si pour tout  $i \in I$ ,  $s_i = s|_{U_i} = 0$ , alors  $s = 0$ , de sorte que si  $\epsilon(s) = 0$ , alors  $s = 0$ , d'où l'injectivité de  $\epsilon$ . D'autre part, d'après la cinquième propriété des faisceaux, voir la Définition 4.1, si  $(s_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  est telle que pour tous  $i \neq j$ ,  $(s_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j)|_{U_i \cap U_j}$ , c-à-d  $(s_i)_{i \in I} \in Z^0(C)$ , alors il existe une section  $s$  telle que  $s|_{U_i} = s_i$  pour tout  $i$ . On en déduit que  $\epsilon(s) = (s_i)_{i \in I}$  et la surjectivité de  $\epsilon$ .  $\square$

Si  $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$  est un raffinement du recouvrement  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ , on appelle application de raffinement toute application  $\varphi : J \rightarrow I$  telle que pour tout  $j \in J$ , on ait  $V_j \subset U_{\varphi(j)}$ . Une telle application induit, pour tout entier naturel  $p$ , un morphisme  $\varphi^p$  défini par

$$\begin{aligned} \varphi^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\ (s_{i_0, \dots, i_p})_{\substack{i_0, \dots, i_p \\ i_k \neq i_l}} &\mapsto (\sigma_{j_0, \dots, j_p})_{\substack{j_0, \dots, j_p \\ j_k \neq j_l}} \end{aligned}$$

où  $\sigma_{j_0, \dots, j_p} = (s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_p)})|_{V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_p}}$  si pour tous  $k \neq l \in \{0, \dots, p\}$ ,  $\varphi(j_k) \neq \varphi(j_l)$ , et  $\sigma_{j_0, \dots, j_p} = 0$  sinon.

**Lemme 4.17.** *Toute application de raffinement  $\varphi : J \rightarrow I$  induit un morphisme de complexes  $\varphi^* : C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ .*

*Démonstration.* Soit  $s = (s_{i_0, \dots, i_p}) \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ , alors

$$\begin{aligned} d^p \circ \varphi^p(s) &= d^p((s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_p)})) \\ &= (\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}}) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \sigma_{j_0, \dots, j_p} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i (s_{\varphi(j_0), \dots, \widehat{\varphi(j_i)}, \dots, \varphi(j_{p+1})})|_{V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_{p+1}}}.$$

D'autre part,  $\varphi^{p+1} \circ d^p(s) = \varphi^{p+1}(\sigma)$ , où  $\sigma = (\sigma_{i_0, \dots, i_{p+1}})$  avec  $\sigma_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k (s_{i_0, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_{p+1}})|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}}$ . Ainsi,

$$\varphi^{p+1} \circ d^p(s) = (\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}}) = d^p \circ \varphi^p(s).$$

$\square$

En fait la démonstration du Lemme 4.17 repose sur le fait que les opérations combinatoires de suppression d'indice et de renumérotation par  $\varphi$  commutent.

**Lemme 4.18.** *Soit  $\mathcal{V}$  un raffinement d'un recouvrement  $\mathcal{U}$  et  $\varphi, \psi$  deux applications de raffinement. Alors, les morphismes induits  $\psi^*$  et  $\varphi^*$  de  $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  dans  $C^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  sont homotopes.*

*Démonstration.* On définit l'homotopie  $K$  en posant

$$\begin{aligned} K : C^p(\mathcal{U}, F) &\rightarrow C^{p-1}(\mathcal{V}, F) \\ s = (s_{i_0, \dots, i_p}) &\mapsto (\sigma_{j_0, \dots, j_{p-1}}), \end{aligned}$$

où  $\sigma_{j_0, \dots, j_{p-1}} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \psi(j_{p-1})}$ . Soit  $s = (s_{i_0, \dots, i_p}) \in C^p(\mathcal{U}, F)$ . Pour fixer les notations, soient  $d(s) = \sigma$ ,  $K(s) = z$ ,  $d(z) = \zeta$ ,  $K(\sigma) = \tau$ . On a alors

$$\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{j_0, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_{p+1}},$$

donc

$$\begin{aligned} \tau_{j_0, \dots, j_p} &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{k=0}^i (-1)^k s_{\varphi(j_0), \dots, \widehat{\varphi(j_k)}, \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \psi(j_p)} \\ &\quad + \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{k=i}^p (-1)^{k+1} s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \widehat{\psi(j_k)}, \dots, \psi(j_p)} \end{aligned}$$

Dans la seconde somme apparaît le terme  $(-1)^{k+1}$  puisqu'on a doublé un indice lors du passage de  $\varphi$  à  $\psi$ . En isolant dans ces deux sommes les termes  $k = i$ , on obtient  $\sum_{i=0}^p s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_{i-1}), \psi(j_i), \dots, \psi(p)}$  et  $-\sum_{i=0}^p s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_{i+1}), \dots, \psi(p)}$ . En les sommant, on obtient une somme télescopique et les seuls deux termes qui ne sont pas annulés sont  $s_{\psi(j_0), \dots, \psi(j_p)}$  et  $-s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_p)}$ , c'est-à-dire  $\psi(s)$  et  $-\varphi(s)$ . On a donc

$$\begin{aligned} K \circ d(s) &= \sum_{i=1}^p (-1)^i \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k s_{\varphi(j_0), \dots, \widehat{\varphi(j_k)}, \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \psi(j_p)} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \sum_{k=i}^p (-1)^{k+1} s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \widehat{\psi(j_k)}, \dots, \psi(j_p)} \\ &\quad + \psi(s) - \varphi(s). \end{aligned}$$

D'autre part,  $z_{j_0, \dots, j_{p-1}} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \psi(j_{p-1})}$ . Donc si on applique  $d^*$ , on obtient

$$\begin{aligned} \zeta_{j_0, \dots, j_p} &= \sum_{k=1}^p (-1)^k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \widehat{\psi(j_k)}, \dots, \psi(j_p)} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \sum_{i=k+1}^p (-1)^{i-1} s_{\varphi(j_0), \dots, \widehat{\varphi(j_k)}, \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \psi(j_p)}. \end{aligned}$$

Ainsi en sommant les deux expressions obtenues, il ne reste que  $\psi(s) - \varphi(s)$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Si  $\mathcal{V}$  raffine  $\mathcal{U}$ , on déduit des Lemmes 4.17 et 4.18 un morphisme canonique de  $\check{H}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  dans  $\check{H}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ , induit par n'importe quelle application de raffinement. Comme deux recouvrements possèdent toujours un raffinement commun, on aboutit à la définition suivante.

**Définition 4.19.** *La cohomologie de Čech d'un faisceau  $\mathcal{F}$  sur un espace topologique  $X$  est la limite directe  $\check{H}^*(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = (\bigsqcup_{\mathcal{U}} \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})) / \sim$ , où  $s \in \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \sim s' \in \check{H}^*(\mathcal{U}', \mathcal{F})$  lorsqu'il existe un raffinement  $\mathcal{V}$  commun à  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}'$  tel que  $\varphi_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(s) = \varphi_{\mathcal{U}', \mathcal{V}}(s')$ .*

Cette cohomologie de Čech peut souvent dans la pratique se calculer avec des recouvrements bien choisis.

**Définition 4.20.** *Un recouvrement  $\mathcal{U}$  est dit acyclique pour le faisceau  $\mathcal{F}$  lorsque pour tout  $p > 0$ , tout  $q \geq 0$  et tous indices  $i_0, \dots, i_q$  avec  $i_k \neq i_l$ , on a  $\check{H}^p(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}, \mathcal{F}) = 0$ .*

**Théorème 4.21** (Leray). *Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert d'un espace topologique  $X$  qui est acyclique pour un faisceau  $\mathcal{F}$ , alors  $\check{H}^*(X, \mathcal{F}) = \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .*

*Démonstration.* Ce théorème de Leray est admis, voir [3] par exemple.  $\square$

**Proposition 4.22.** *Pour tout faisceau en groupes abéliens  $\mathcal{F}$  sur une variété différentielle  $M$  de dimension  $n$  et pour tout  $p > n$ ,  $\check{H}^p(M, \mathcal{F}) = 0$ .*

*Démonstration.* On a vu que  $M$  possède une triangulation donnée par la méthode de Whitney (Théorème 3.41) et qu'à cette triangulation, on peut associer un recouvrement d'ouvert  $\mathcal{U}$  de  $M$  dont les intersections sont soit vides soit difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$  (Corollaire 3.42). En fait, à chaque sommet  $s$  de la triangulation est associé un ouvert  $U_s$  et l'intersection de  $p+1$  de ces ouverts  $U_{s_0} \cap \dots \cap U_{s_p}$  est non vide si et seulement si  $s_0, \dots, s_p$  sont les sommets d'un simplexe de la triangulation. Si  $p > n$ , et  $s_0, \dots, s_p$  sont  $p+1$  sommets distincts, il n'existe aucun simplexe qui les contient comme sommets, puisque ce simplexe serait de dimension strictement plus grande que  $n$ . Par suite  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$  pour  $p > n$  et donc  $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ . Enfin, tout recouvrement d'ouverts de  $M$  possède un raffinement associé à une triangulation suffisamment fine, donc  $\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = 0$  pour tout  $p > n$ .  $\square$

## 4.2.2 Exemples

Exemple 1 : Le faisceau  $\mathbb{Z}_M$  des fonctions localement constantes de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .

**Théorème 4.23.** *Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ , alors la cohomologie de Čech de  $M$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}_M$  est isomorphe à sa cohomologie singulière à coefficients entiers.*

*Démonstration.* On munit  $M$  d'une triangulation  $\tau$  donnée par la méthode de Whitney (Théorème 3.41) et on considère le recouvrement d'ouverts associés  $\mathcal{U} = (U_s)_{s \in S}$  où  $S$  désigne l'ensemble des sommets de  $\tau$  (Corollaire 3.42). Alors, si  $s_0, \dots, s_p \in S$  sont  $p+1$  sommets distincts de  $\tau$ ,  $U_{s_0} \cap \dots \cap U_{s_p}$  est vide si  $s_0, \dots, s_p$  ne sont pas les sommets d'un simplexe et se rétracte sur le  $(p+1)$ -simplexe  $[s_0, \dots, s_p]$  sinon. En effet cette intersection est alors par définition l'ensemble des simplexes de  $\tau$  adjacents à tous les sommets  $s_0, \dots, s_p$ , de sorte que tous ces simplexes possèdent  $[s_0, \dots, s_p]$  comme face. On en déduit l'isomorphisme tautologique

$$\begin{aligned} \psi^p : C^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_M) &\rightarrow C^p(\tau, \mathbb{Z}) \\ (\sigma_{s_0, \dots, s_p})_{\substack{s_0, \dots, s_p \\ s_k \neq s_l}} &\mapsto \left( c_p : \begin{array}{ccc} C_p(\tau, \mathbb{Z}) & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ [s_0, \dots, s_p] & \mapsto & \sigma_{s_0, \dots, s_p} \end{array} \right) \end{aligned}$$

En effet, comme  $U_{s_0} \cap \dots \cap U_{s_p}$  est connexe,  $\sigma_{s_0, \dots, s_p} \in \mathbb{Z}_M(U_{s_0} \cap \dots \cap U_{s_p})$  est une fonction constante à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Par définition,  $\psi^{p+1} \circ d^p = d^p \circ \psi^p$  et on en déduit l'isomorphisme  $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_M) \simeq H^p(\tau, \mathbb{Z}) \simeq H^p(M, \mathbb{Z})$  le deuxième isomorphisme provenant du Théorème 3.67. Or tout recouvrement d'ouverts  $\mathcal{U}$  de  $M$  possède un raffinement associé à une triangulation suffisamment fine et on en déduit l'isomorphisme  $\check{H}^p(M, \mathbb{Z}_M) \simeq H^p(M, \mathbb{Z})$ .  $\square$

En fait, ces recouvrements  $\mathcal{U}$  sont acycliques pour le faisceau  $\mathbb{Z}_M$  comme toutes les intersections sont vides ou difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$  et comme  $\check{H}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}_M) = 0$  si  $p > 0$ . On aurait donc pu conclure par le Théorème 4.21.

Exemple 2 : Le faisceau  $\Omega^q$  des  $q$ -formes différentielles sur une variété  $M$ .

**Proposition 4.24.** *Soit  $M$  une variété différentielle et  $q$  un entier naturel. Alors, pour tout  $p > 0$ ,  $\check{H}^p(M, \Omega^q) = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement localement fini de  $M$  et soit  $\alpha = (\alpha_{i_0, \dots, i_p})_{\substack{i_0, \dots, i_p \\ i_k \neq i_l}} \in C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$  tel que  $d^p \alpha = (\beta_{j_0, \dots, j_{p+1}})_{\substack{j_0, \dots, j_{p+1} \\ j_k \neq j_l}} = 0$ . On rappelle

que  $\beta_{j_0, \dots, j_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k (\alpha_{j_0, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_{p+1}})|_{U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_{p+1}}}$ . Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une partition de l'unité associée au recouvrement  $\mathcal{U}$ . Soient  $j_0, \dots, j_{p-1} \in I$  des indices distincts. Alors, pour tout  $i \in I$  différent de  $j_0, \dots, j_{p-1}$ , la  $q$ -forme  $f_i \alpha_{i, j_0, \dots, j_{p-1}}$  définie sur

$U_i \cap U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_{p-1}}$ , se prolonge par 0 sur  $(U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_{p-1}}) \setminus U_i$  puisque le support de  $f_i$  est inclus dans  $U_i$ . On pose alors  $\gamma_{j_0, \dots, j_{p-1}} = \sum_{i \in I \setminus \{j_0, \dots, j_{p-1}\}} (f_i \alpha_{i, j_0, \dots, j_{p-1}}) \in \Omega^q(U_{j_0, \dots, j_{p-1}}, \mathbb{R})$  et on montre que  $\alpha = d^{p-1} \gamma$ . Soient  $j_0, \dots, j_p \in I$ ,  $j_k \neq j_l$ . Alors, pour tout  $i \in I \setminus \{j_0, \dots, j_p\}$ , on a  $0 = \beta_{i, j_0, \dots, j_p} = \alpha_{j_0, \dots, j_p} - \sum_{k=0}^p (-1)^k \alpha_{i, j_0, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_p}$ . De ceci on déduit, pour tout  $i \in I \setminus \{j_0, \dots, j_p\}$ ,  $f_i \alpha_{j_0, \dots, j_p} = \sum_{k=0}^p (-1)^k f_i \alpha_{i, j_0, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_p}$ . D'autre part, pour  $k \in \{0, \dots, p\}$ , on a aussi  $f_{j_k} \alpha_{j_0, \dots, j_p} = (-1)^k f_{j_k} \alpha_{j_k, j_0, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_p}$ . Par sommation, on en déduit que  $\alpha = d^{p-1} \gamma$ . Ainsi,  $\check{H}^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = 0$ . Enfin, tout recouvrement d'ouverts possède un raffinement localement fini d'après le Théorème 1.6. On en déduit que  $\check{H}^p(M, \Omega^q) = 0$ .  $\square$

Dans cette démonstration, la seule propriété du faisceau  $\Omega^q$  que l'on a utilisé est la suivante.

**Définition 4.25.** *Un faisceau  $\mathcal{F}$  sur un espace topologique  $X$  paracompact est dit fin lorsque pour tout recouvrement d'ouverts localement fini  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  de  $X$ , il existe une famille de morphismes de faisceaux  $f_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  telle que le support de  $f_i$  soit inclus dans  $U_i$  et telle que  $\sum_{i \in I} f_i = Id_{\mathcal{F}}$ .*

La Proposition 4.24 peut donc se reformuler ainsi : tout faisceau fin est acyclique.

## 4.3 Cohomologie des faisceaux

### 4.3.1 Résolutions et théorème de de Rham

**Définition 4.26.** *Une résolution d'un faisceau  $\mathcal{F}$  sur un espace topologique  $X$  est la donnée d'une suite exacte longue de faisceaux  $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d^1} \dots \rightarrow \mathcal{G}^k \xrightarrow{d^k} \dots$ . Une telle suite est dite acyclique lorsque les faisceaux  $\mathcal{G}^i$  sont acycliques, fine lorsqu'ils sont fins, etc...*

*Exemple 4.27.* Si  $M$  est une variété différentielle, alors la suite exacte de faisceaux de de Rham  $0 \rightarrow \mathbb{R}_M \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \dots$  fournit une résolution acyclique du faisceau  $\mathbb{R}_M$  des fonctions localement constantes sur  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

En spécialisant une résolution aux sections globales des faisceaux, on déduit un complexe de groupes abéliens  $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}^0(X) \rightarrow \mathcal{G}^1(X) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{G}^k(X) \rightarrow \dots$ . Uniquement un complexe et non une suite exacte, puisqu'on a vu que le foncteur des sections globales ne préserve pas l'exactitude, voir la Remarque 4.11.

Dans le cas de la résolution de de Rham sur une variété compacte connexe, on obtient le complexe de de Rham augmenté  $0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \Omega^0(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Omega^1(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{d} \dots$

**Théorème 4.28** (Théorème de de Rham). *Soit  $M$  une variété différentielle. Alors la cohomologie de Čech du faisceau  $\mathbb{R}_M$  des fonctions localement constantes sur  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  coïncide avec la cohomologie de de Rham de  $M$ .*

*Démonstration.* La résolution de de Rham  $0 \rightarrow \mathbb{R}_M \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \rightarrow \dots$  sur  $M$  se décompose en suites exactes courtes de faisceaux  $0 \rightarrow \mathbb{R}_M \rightarrow \Omega^0 \rightarrow d\Omega^0 \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow d\Omega^0 \rightarrow \Omega^1 \rightarrow d\Omega^1 \rightarrow 0$ , ...,  $0 \rightarrow d\Omega^{q-1} \rightarrow \Omega^q \rightarrow d\Omega^q \rightarrow 0$ , ...

Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $M$  par des ouverts dont toutes les intersections sont soit vides soit difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ , donné par le Corollaire 3.42. On déduit de ces suites exactes courtes de faisceaux des suites exactes courtes de complexes de Čech associés au recouvrement  $\mathcal{U}$  :  $0 \rightarrow C(\mathcal{U}, \mathbb{R}_M) \rightarrow C(\mathcal{U}, \Omega^0) \rightarrow C(\mathcal{U}, d\Omega^0) \rightarrow 0$ , ...,  $0 \rightarrow C(\mathcal{U}, d\Omega^{q-1}) \rightarrow C(\mathcal{U}, \Omega^q) \rightarrow C(\mathcal{U}, d\Omega^q) \rightarrow 0$ . En effet l'exactitude à gauche et au milieu proviennent directement de l'exactitude au niveau des faisceaux. L'exactitude à droite serait fausse en général, mais vraie ici d'après le Théorème de Poincaré. En effet, les intersections d'ouverts sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$  par hypothèse, et toute forme fermée sur  $\mathbb{R}^n$  est exacte d'après ce théorème. Comme un élément de  $C^*(\mathcal{U}, d\Omega^q)$  est la donnée d'une forme fermée sur chaque intersection d'ouverts, on en déduit l'exactitude à droite.

On considère alors les suites exactes longues associées en cohomologie

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}_M) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \Omega^0) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, d\Omega^0) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}_M) \rightarrow \dots$$

Dans cette suite,  $\check{H}^0(M, \Omega^0) = \Omega^0(M, \mathbb{R})$  (sections globales),  $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}_M) = H_{dR}^0(M, \mathbb{R})$  et  $\check{H}^1(\mathcal{U}, \Omega^0) = \dots = \check{H}^p(\mathcal{U}, \Omega^0) = 0$  d'après la Proposition 4.24. Par suite,  $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}_M)$  est le conoyau de la différentielle extérieure, puisque  $\check{H}^0(\mathcal{U}, d\Omega^0) = Z_{dR}^1(M, \mathbb{R})$ . Ainsi,  $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}_M) = H_{dR}^1(M, \mathbb{R})$  et pour tout  $p \geq 1$ ,  $\check{H}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}_M) \simeq \check{H}^p(\mathcal{U}, d\Omega^0)$ .

De même, on obtient pour tout  $q \geq 1$  la suite exacte longue

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, d\Omega^{q-1}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \Omega^q) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, d\Omega^q) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, d\Omega^{q-1}) \rightarrow \dots$$

À nouveau, d'après la Proposition 4.24,  $\check{H}^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = 0$  pour tout  $p \geq 1$ , tandis que  $\check{H}^0(\mathcal{U}, d\Omega^q) = Z_{dR}^{q+1}(M, \mathbb{R})$  et  $\check{H}^0(\mathcal{U}, \Omega^q) = \Omega^q(M, \mathbb{R})$ . On en déduit que  $\check{H}^1(\mathcal{U}, d\Omega^{q-1}) \simeq H_{dR}^{q+1}(M, \mathbb{R})$  et pour tout  $p \geq 1$ ,  $\check{H}^{p+1}(\mathcal{U}, d\Omega^{q-1}) \simeq \check{H}^p(\mathcal{U}, d\Omega^q)$ . Ainsi, pour tout  $p \geq 1$ ,  $\check{H}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}_M) \simeq \check{H}^p(\mathcal{U}, d\Omega^0) \simeq \dots \simeq \check{H}^1(\mathcal{U}, d\Omega^{p-1}) \simeq H_{dR}^{p+1}(M, \mathbb{R})$ . Enfin, tout recouvrement d'ouverts possède un raffinement dont les intersections sont soit vides soit difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$  d'après le Corollaire 3.42, d'où le résultat.  $\square$

Pour identifier la cohomologie de Čech de  $\mathbb{R}_M$  avec la cohomologie de de Rham, les seules choses que l'on a utilisé dans cette démonstration sont que la résolution de de Rham est acyclique pour la cohomologie de Čech et que les suites exactes

courtes de faisceaux associées induisent des suites longues en cohomologie de Čech pour le recouvrement  $\mathcal{U}$ . Ce dernier point est faux en général mais il est vrai à la limite directe en cohomologie de Čech : toute suite exacte courte de faisceaux induit une suite exacte longue en cohomologie de Čech, voir le Théorème 3.7 de [9].

#### 4.3.2 Faisceaux injectifs

**Définition 4.29.** *Un faisceau  $\mathcal{G}$  sur un espace topologique  $X$  est dit injectif lorsque pour toute suite exacte courte de faisceaux  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ , la suite courte  $0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \rightarrow 0$  est également exacte.*

La définition 4.29 est à comparer avec la Proposition 2.22. L'exactitude de  $0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G})$  est vraie en général. En effet, si  $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G})$  vaut 0 dans  $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ , alors le noyau de  $\varphi$ , sous-faisceau de  $\mathcal{F}''$ , contient le préfaisceau image de  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  et donc le faisceau image associé. Comme ce dernier vaut  $\mathcal{F}''$  par hypothèse, on en déduit que  $\varphi = 0$  et donc l'injectivité à gauche. De même, si  $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  se restreint à 0 dans  $\text{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G})$ , cela signifie que le noyau de  $\varphi$  contient  $\mathcal{F}'$ , et donc  $\varphi$  passe au quotient en un morphisme de préfaisceau du conoyau  $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$  vers  $\mathcal{G}$  et du faisceau associé vers  $\mathcal{G}$ , c-à-d en un élément de  $\text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G})$ . Comme la composée  $\text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G})$  s'annule, on déduit l'exactitude au milieu. Ce qui est faux en général, c'est l'exactitude à droite, c-à-d le fait que tout morphisme de faisceaux de  $\mathcal{F}'$  dans  $\mathcal{G}$  se prolonge en un morphisme de faisceaux de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{G}$ .

*Exercice 4.30.* De même, un groupe abélien  $G$  est injectif lorsque le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, G)$  est exact.

1. Montrer que  $G$  est injectif si et seulement si pour tout  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , l'application  $m_\lambda : x \in G \mapsto \lambda x \in G$  est surjective.
2. En déduire que  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  sont injectifs.
3. En déduire que tout groupe abélien s'injecte dans un groupe abélien injectif.

Une résolution  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}^1 \rightarrow \dots$  est dite injective si tous les faisceaux  $\mathcal{G}^k$  sont injectifs.

**Proposition 4.31.** *Soit  $\varphi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  un morphisme de faisceaux et soient deux résolutions injectives  $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{G}_1^0 \rightarrow \mathcal{G}_1^1 \rightarrow \dots$  et  $0 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{G}_2^0 \rightarrow \mathcal{G}_2^1 \rightarrow \dots$  de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Alors  $\varphi$  se prolonge en un morphisme de complexes*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{G}_1^0 & \xrightarrow{d^0} & \mathcal{G}_1^1 \xrightarrow{d^1} \dots \\ & & \varphi \downarrow & & \varphi^0 \downarrow & & \varphi^1 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{i_2} & \mathcal{G}_2^0 & \xrightarrow{d^0} & \mathcal{G}_2^1 \xrightarrow{d^1} \dots \end{array}$$



De plus, l'extension  $(\varphi^i)_{i \in \mathbb{N}}$  est unique à homotopie près.

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{G}_2^0$  est injectif, le morphisme  $i_2 \circ \varphi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2^0$  se prolonge en un morphisme  $\varphi^0 \in \text{Hom}(\mathcal{G}_1^0, \mathcal{G}_2^0)$ , de sorte que  $i_2 \circ \varphi = \varphi^0 \circ i_1$ , puisque  $\mathcal{F}_1$  est un sous-faisceau de  $\mathcal{G}_1^0$ . Puis,  $d^0 \circ \varphi^0 \in \text{Hom}(\mathcal{G}_1^0, \mathcal{G}_2^1)$  contient  $\mathcal{F}_1$  dans son noyau puisque  $d^0 \circ \varphi^0 \circ i_1 = d^0 \circ i_2 \circ \varphi = 0$ . Ainsi,  $d^0 \circ \varphi^0$  passe au quotient en un morphisme  $\mathcal{G}_1^0/\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2^1$  et comme  $\mathcal{G}_2^1$  est injectif, ce morphisme se prolonge en un morphisme  $\varphi^1 : \mathcal{G}_1^1 \rightarrow \mathcal{G}_2^1$  de sorte que  $\varphi^1 \circ d^0 = d^0 \circ \varphi^0$ . Par récurrence, on construit  $\varphi^k$  tel que  $d^k \circ \varphi^k$  contient  $\text{Im}(d^{k-1})$  dans son noyau, passe donc au quotient en un morphisme  $\mathcal{G}_1^k/d^{k-1}(\mathcal{G}_1^{k-1}) \rightarrow \mathcal{G}_2^{k+1}$  puis se prolonge par injectivité de  $\mathcal{G}_2^{k+1}$  en un morphisme  $\varphi^{k+1} : \mathcal{G}_1^{k+1} \rightarrow \mathcal{G}_2^{k+1}$  de sorte que  $d^k \circ \varphi^k = \varphi^{k+1} \circ d^k$ .

Si  $(\varphi^i)$  et  $(\psi^i)$  sont deux telles extensions,  $\varphi^0 \circ i_1 = i_2 \circ \varphi = \psi^0 \circ i_1$ . Donc  $(\varphi^0 - \psi^0) \circ i_1 = 0$  et  $\varphi^0 - \psi^0$  passe au quotient en un morphisme  $\mathcal{G}_1^0/\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2^0$ . Comme  $\mathcal{G}_2^0$  est injectif, il se prolonge en un morphisme  $k^1 : \mathcal{G}_1^1 \rightarrow \mathcal{G}_2^0$  de sorte que  $\varphi^0 - \psi^0 = k^1 \circ d^0$ .

Puis  $d^0 \circ \varphi^0 = \varphi^1 \circ d^0$  et  $d^0 \circ \psi^0 = \psi^1 \circ d^0$ , donc  $d^0 \circ (\varphi^0 - \psi^0) = (\varphi^1 - \psi^1) \circ d^0$ , c-à-d  $(\varphi^1 - \psi^1 - d^0 \circ k^1) \circ d^0 = 0$ . On en déduit que  $\varphi^1 - \psi^1 - d^0 \circ k^1$  passe au quotient en un morphisme  $\mathcal{G}_1^1/d^0(\mathcal{G}_1^0) \rightarrow \mathcal{G}_2^1$  et par injectivité de  $\mathcal{G}_2^1$ , ce morphisme se prolonge en un morphisme  $k^2 : \mathcal{G}_1^2 \rightarrow \mathcal{G}_2^1$  de sorte que  $\varphi^1 - \psi^1 = d^0 \circ k^1 + k^2 \circ d^1$ .

Par récurrence, on construit  $k^i$  tel que  $\varphi^{i-1} - \psi^{i-1} = d^{i-2} \circ k^{i-1} + k^i \circ d^{i-1}$ . Alors  $(\varphi^i - \psi^i) \circ d^{i-1} = d^{i-1} \circ (\varphi^{i-1} - \psi^{i-1})$  et donc  $(\varphi^i - \psi^i - d^{i-1} \circ k^i) \circ d^{i-1} = 0$ . On en déduit que  $\varphi^i - \psi^i - d^{i-1} \circ k^i$  passe au quotient en un morphisme  $\mathcal{G}_1^i/d^{i-1}(\mathcal{G}_1^{i-1}) \rightarrow \mathcal{G}_2^i$  et par injectivité de  $\mathcal{G}_2^i$ , ce morphisme se prolonge en un morphisme  $k^{i+1} : \mathcal{G}_1^{i+1} \rightarrow \mathcal{G}_2^i$  de sorte que  $\varphi^i - \psi^i = d^{i-1} \circ k^i + k^{i+1} \circ d^i$ .  $\square$

**Corollaire 4.32.** *Deux résolutions injectives d'un même faisceau  $\mathcal{F}$  ont même type d'homotopie. De plus, l'équivalence d'homotopie est canonique.*

*Démonstration.* Soient  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_1^0 \rightarrow \mathcal{G}_1^1 \rightarrow \dots$  et  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_2^0 \rightarrow \mathcal{G}_2^1 \rightarrow \dots$  deux résolutions injectives de  $\mathcal{F}$ . Alors, d'après la Proposition 4.31, le morphisme  $\varphi = \text{Id}_{\mathcal{F}}$  se prolonge en des morphismes  $\varphi^i$  de  $\mathcal{G}_1^i$  vers  $\mathcal{G}_2^i$  et  $\psi^i$  de  $\mathcal{G}_2^i$  vers  $\mathcal{G}_1^i$ . De plus, les composées  $\varphi^i \circ \psi^i$  et  $\psi^i \circ \varphi^i$  prolongent l'identité de  $\mathcal{F}$  d'une résolution dans elle-même et sont donc homotopes à l'identité de  $\mathcal{G}_1^i$  dans  $\mathcal{G}_1^i$  et de  $\mathcal{G}_2^i$  dans  $\mathcal{G}_2^i$  respectivement.  $\square$

En appliquant le foncteur sections globales à une résolution injective  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}^1 \rightarrow \dots$ , on obtient comme dans le cas de la résolution de de Rham un complexe augmenté de groupes abéliens  $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}^0(X) \rightarrow \mathcal{G}^1(X) \rightarrow \dots$  canoniquement défini à homotopie près.

**Définition 4.33.** *On appelle cohomologie du faisceau en groupes abéliens  $\mathcal{F}$  sur  $X$  et on note  $H^*(X, \mathcal{F})$  la cohomologie du complexe  $0 \rightarrow \mathcal{G}^0(X) \rightarrow \mathcal{G}^1(X) \rightarrow \dots$  où  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}^1 \rightarrow \dots$  est une résolution injective de  $\mathcal{F}$ .*

Remarquons que l'on a de nouveau enlevé l'augmentation  $\mathcal{F}$ , comme dans le cas de de Rham, de sorte que  $H^0(X, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(X)$ , les sections globales de  $\mathcal{F}$ . En effet,  $\text{Ker}(d^0) = \mathcal{F}$  et dans la mesure où  $\mathcal{F}$  s'injecte dans  $\mathcal{G}^0$ , le faisceau image de cette injection coïncide avec  $\mathcal{F}$ . Plus généralement, si  $F$  est un foncteur de la catégorie des faisceaux vers une catégorie abélienne et si  $F$  est exact à gauche et additif (c-à-d qu'au niveau des morphismes,  $F$  est un morphisme de groupes), alors pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  en groupes abéliens sur  $X$ , on peut appliquer le foncteur  $F$  à une résolution injective  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}^1 \rightarrow \dots$  pour obtenir un complexe augmenté  $0 \rightarrow F(\mathcal{F}) \rightarrow F(\mathcal{G}^0) \rightarrow F(\mathcal{G}^1) \rightarrow \dots$  bien défini à équivalence d'homotopie près. On appelle alors  $i$ -ième dérivée à droite du foncteur  $F$  et on note  $R^i F$  le foncteur qui à  $\mathcal{F}$  associe le  $i$ -ième groupe de cohomologie du complexe  $0 \rightarrow F(\mathcal{G}^0) \rightarrow F(\mathcal{G}^1) \rightarrow \dots$  de sorte que  $R^0 F = F$ .

*Exemple 4.34.* Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue et  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $X$ , alors on note  $f_* \mathcal{F}$  le faisceau sur  $Y$  défini par  $(f_* \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$  pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ . C'est le faisceau poussé en avant de  $\mathcal{F}$  par  $f$ . Cette opération définit un foncteur  $f_*$  de la catégorie des faisceaux sur  $X$  vers la catégorie des faisceaux sur  $Y$  qui est exact à gauche et additif. Lorsque  $Y$  est un point, la catégorie des faisceaux sur  $Y$  coïncide avec la catégorie des groupes abéliens et  $f_*$  coïncide avec le foncteur des sections globales.

**Proposition 4.35.** *Toute suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  de faisceaux induit une suite exacte longue en cohomologie*

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow \dots$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que l'on peut trouver des résolutions injectives  $\mathcal{G}'$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}''$  de ces trois faisceaux de façon à obtenir une suite exacte courte de résolutions, c-à-d telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}'_0 & \longrightarrow & \mathcal{G}_0 & \longrightarrow & \mathcal{G}''_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{G}_1 & \longrightarrow & \mathcal{G}''_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

En effet, en appliquant alors le foncteur des sections globales, on déduit la suite courte de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & 0 & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(X) & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{p} & \mathcal{F}''(X) \\
& j' \downarrow & & j \downarrow & & j'' \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G}'_0(X) & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathcal{G}_0(X) & \xrightarrow{\psi_0} & \mathcal{G}''_0(X) \longrightarrow 0 \\
& d'_0 \downarrow & & d_0 \downarrow & & d''_0 \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G}'_1(X) & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathcal{G}_1(X) & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{G}''_1(X) \longrightarrow 0 \\
& d'_1 \downarrow & & d_1 \downarrow & & d''_1 \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & 
\end{array}$$

Puisque les suites courtes  $0 \rightarrow \mathcal{G}'_i \rightarrow \mathcal{G}_i \rightarrow \mathcal{G}''_i \rightarrow 0$  sont des résolutions injectives du faisceau trivial dont la cohomologie est nulle, les suites courtes horizontales sont exactes. En appliquant le foncteur section globale, on conserve donc l'exactitude de ces suites horizontales pour obtenir une suite exacte courte de complexes  $0 \rightarrow \mathcal{G}'(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{G}''(X) \rightarrow 0$  et la suite exacte longue en cohomologie donnée par le Théorème 2.18.

Pour obtenir la suite courte de résolutions injectives, on part d'une résolution injective quelconque  $0 \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow \mathcal{G}''_0 \rightarrow \mathcal{G}''_1 \rightarrow \dots$  de  $\mathcal{F}''$ . Puis  $\mathcal{F}$  s'injecte dans un faisceau injectif  $\tilde{\mathcal{G}}_0$  via un morphisme  $\tilde{j}$  et  $j'' \circ p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}''_0$  se prolonge en  $\tilde{\psi}_0 : \tilde{\mathcal{G}}_0 \rightarrow \mathcal{G}''_0$ . Le morphisme  $\tilde{\psi}_0$  n'est pas surjectif a priori. On pose alors  $\mathcal{G}_0 = \tilde{\mathcal{G}}_0 \oplus \mathcal{G}''_0$  et on définit les morphismes

$$\begin{aligned}
\psi_0 : \tilde{\mathcal{G}}_0 \oplus \mathcal{G}''_0 &\rightarrow \mathcal{G}''_0 \\
(g_0, g''_0) &\mapsto \tilde{\psi}_0(g_0) - g''_0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
j : \mathcal{F} &\rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_0 \oplus \mathcal{G}''_0 \\
f &\mapsto (\tilde{j}(f), 0)
\end{aligned}$$

On complète le diagramme à gauche en posant  $j' = \tilde{j} \circ i$ ,  $\mathcal{G}'_0 = \tilde{\mathcal{G}}_0$  et

$$\begin{aligned}
\varphi_0 : \tilde{\mathcal{G}}_0 &\rightarrow \mathcal{G}_0 \\
\tilde{g}_0 &\mapsto (\tilde{g}_0, \tilde{\psi}_0(\tilde{g}_0)).
\end{aligned}$$

Ce diagramme est alors commutatif, puisque si  $g_0 = j \circ i(f')$ , on a  $\psi_0(g_0) = \psi_0 \circ j \circ i(f') = j \circ p \circ i(f) = 0$ . Donc  $\tilde{\psi}_0(\tilde{j} \circ i(f')) = 0$  et comme  $\tilde{\psi}_0(g_0) = 0$ ,  $j \circ i(f') = \varphi_0 \circ j'(f')$ .

Le faisceau quotient  $\mathcal{G}_0/\mathcal{F}$  s'injecte dans un faisceau injectif  $\tilde{\mathcal{G}}_1$  et on obtient de même le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{\psi_0} & \mathcal{G}_0'' & \longrightarrow & 0 \\ \tilde{d}_0 \downarrow & & \downarrow d_0'' & & \\ \tilde{\mathcal{G}}_1 & \xrightarrow{\tilde{\psi}_1} & \mathcal{G}_1'' & & \end{array}$$

donné par la Proposition 4.31, où  $\text{Ker}(\tilde{d}_0) = \mathcal{F}$ . On pose  $\mathcal{G}_1 = \tilde{\mathcal{G}}_1 \oplus \mathcal{G}_1''$  et on définit les morphismes

$$\begin{aligned} \psi_1 : \quad \tilde{\mathcal{G}}_1 \oplus \mathcal{G}_1'' &\rightarrow \mathcal{G}_1'' \\ (g_1, g_1'') &\mapsto \tilde{\psi}_1(g_1) - g_1'' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_0 : \quad \mathcal{G}_0 &\rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_1 \oplus \mathcal{G}_1'' \\ g_0 &\mapsto (\tilde{d}_0(g_0), 0) \end{aligned}$$

On complète le diagramme à gauche en posant  $d_0' = \tilde{d}_0 \circ \varphi_0$ ,  $\mathcal{G}_1' = \tilde{\mathcal{G}}_1$  et

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \quad \tilde{\mathcal{G}}_1 &\rightarrow \mathcal{G}_1 \\ \tilde{g}_1 &\mapsto (\tilde{g}_1, \tilde{\psi}_1(\tilde{g}_1)) \end{aligned}$$

et le diagramme devient à nouveau commutatif, puisque si  $g_1 = d_0 \circ \varphi_0(g_0')$ , alors  $\tilde{\psi}_1(\tilde{d}_0 \circ \varphi_0(g_0')) = 0$ .

Enfin,  $\text{Im}(j) = \text{Ker}(\tilde{d}_0) = \text{Ker}(d_0)$  et il reste à voir que  $\text{Im}(j') = \text{Ker}(d_0')$ . Soit  $\tilde{g}_0 \in \text{Ker}(d_0')$ , alors  $\varphi_0(\tilde{g}_0) \in \text{Ker}(\tilde{d}_0) = j(\mathcal{F})$ . En particulier,  $\tilde{\psi}_0(\tilde{g}_0)$  s'annule et  $\tilde{g}_0 = \tilde{j}(f)$ . Puis  $j'' \circ p(f) = \psi_0 \circ j(f) = \tilde{\psi}_0(\tilde{g}_0) = 0$  et  $j''$  étant injective,  $p(f) = 0$ . Par suite,  $f = i(f')$  et  $\tilde{g}_0 = j'(f')$ .

En procédant par récurrence, on en déduit le résultat.  $\square$

**Corollaire 4.36.** *Si  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}^1 \rightarrow \dots$  est une résolution acyclique de  $\mathcal{F}$  (au sens de la cohomologie des faisceaux), alors la cohomologie des complexes  $0 \rightarrow \mathcal{G}^0(X) \rightarrow \mathcal{G}^1(X) \rightarrow \dots$  coïncide avec la cohomologie de  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* C'est la même que celle du Théorème 4.28, puisque cette résolution se scinde en une infinité de suites exactes courtes de faisceaux, que d'après la Proposition 4.35 ces suites courtes induisent des suites longues en cohomologie et que c'est la seule chose, avec l'acyclicité des résolutions, dont on s'est servi pour démontrer le Théorème 4.28.  $\square$

Il résulte de ce Corollaire 4.36 qu'il n'est pas nécessaire de trouver une résolution injective pour calculer la cohomologie de  $\mathcal{F}$ , une résolution acyclique suffit.

### 4.3.3 Résolution canonique

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau en groupes abéliens sur un espace topologique  $X$ . On considère le faisceau  $\mathcal{F}^0$  défini pour tout ouvert  $U$  de  $X$  par  $\mathcal{F}^0(U) = \{\sigma : U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x, \forall x \in U, \sigma(x) \in \mathcal{F}_x\}$ . Attention, ces sections ne sont pas holonomes, c-à-d qu'il n'existe pas (en général) de vraie section  $s \in \mathcal{F}(U)$  telle que pour tout  $x \in U$ ,  $\sigma(x) = s_x$ , même pas localement. Ce sont des sections discontinues. En fait, à tout point  $x$  de  $X$  est associé le groupe abélien  $\mathcal{F}_x$  et donc le faisceau gratte-ciel  $\underline{\mathcal{F}}_x$  concentré en  $x$ . Alors  $\mathcal{F}^0 = \prod_{x \in X} \underline{\mathcal{F}}_x$ .

**Définition 4.37.** *Un faisceau sur  $X$  est dit flasque lorsque toute section définie sur un ouvert  $U$  de  $X$  se prolonge en une section globale.*

**Lemme 4.38.** *Pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$ ,  $\mathcal{F}$  se plonge dans  $\mathcal{F}^0$  et  $\mathcal{F}^0$  est flasque.*

*Démonstration.* Si  $\sigma \in \mathcal{F}^0(U)$ , on peut prolonger  $\sigma$  par 0 sur  $X \setminus U$ , de sorte que  $\mathcal{F}^0$  est flasque. Par ailleurs, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \rightarrow & \mathcal{F}^0(U) \\ s & \mapsto & \left( \sigma : U \rightarrow \mathcal{F}_x \right) \\ & & x \mapsto s_x \end{array}$$

est injectif et ces morphismes définissent un morphisme injectif de faisceau  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^0$ .  $\square$

De même, d'après l'Exercice 4.30, pour tout  $x \in X$ , le groupe abélien  $\mathcal{F}_x$  s'injecte dans un groupe abélien injectif  $\mathcal{G}_x$ . On considère le faisceau gratte-ciel  $\underline{\mathcal{G}}_x$  associé et on pose  $\mathcal{G}^0 = \prod_{x \in X} \underline{\mathcal{G}}_x$ .

**Lemme 4.39.** *Pour tout faisceau en groupes abéliens  $\mathcal{F}$  sur  $X$ ,  $\mathcal{F}$  s'injecte dans  $\mathcal{G}^0$  et  $\mathcal{G}^0$  est injectif.*

*Démonstration.* D'après le Lemme 4.38,  $\mathcal{F}$  s'injecte dans  $\mathcal{F}^0$  et par définition  $\mathcal{F}^0$  s'injecte dans  $\mathcal{G}^0$ , donc  $\mathcal{F}$  s'injecte dans  $\mathcal{G}^0$ . De plus, pour tout faisceau  $\mathcal{H}$  sur  $X$ ,  $\text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G}^0) = \prod_{x \in X} \text{Hom}(\mathcal{H}, \underline{\mathcal{G}}_x) \simeq \prod_{x \in X} \text{Hom}(\mathcal{H}_x, \mathcal{G}_x)$ .

Par suite, si  $0 \rightarrow \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'' \rightarrow 0$  est exacte, comme  $\mathcal{G}_x$  est injectif, la suite  $0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}''_x, \mathcal{G}_x) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}_x, \mathcal{G}_x) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}'_x, \mathcal{G}_x) \rightarrow 0$  est également exacte, et par produit direct,  $0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}'', \mathcal{G}^0) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G}^0) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}', \mathcal{G}^0) \rightarrow 0$  est exacte.  $\square$

Ainsi, en appliquant le Lemme 4.39 par induction à  $\mathcal{G}^0/\mathcal{F}$ , on déduit que tout faisceau possède une résolution injective.

De même, en posant  $\mathcal{F}^1 = (\mathcal{F}^0)^0$ ,  $\mathcal{F}^2 = (\mathcal{F}^1)^0$ , ... on construit une résolution canonique de  $\mathcal{F}$  qui est flasque, cette construction est due à R. Godement.

**Proposition 4.40.** *Tout faisceau injectif est flasque et tout faisceau flasque est acyclique.*

La démonstration de la Proposition 4.40 est laissée en exercice.

## Références

- [1] Raoul Bott and Loring W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. MR 658304 (83i :57016)
- [2] Glen E. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1997, Corrected third printing of the 1993 original. MR 1700700 (2000b :55001)
- [3] Jean-Pierre Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, Unpublished, <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/documents.html>, 2012.
- [4] Albrecht Dold, *Lectures on algebraic topology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1972 edition. MR 1335915 (96c :55001)
- [5] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov, *Modern geometry—methods and applications. Part III*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 124, Springer-Verlag, New York, 1990, Introduction to homology theory, Translated from the Russian by Robert G. Burns. MR 1076994 (91j :55001)
- [6] Roger Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1973, Troisième édition revue et corrigée, Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. MR 0345092 (49 #9831)
- [7] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. MR 0463157 (57 #3116)
- [8] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR 1867354 (2002k :55001)
- [9] Kunihiko Kodaira, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, english ed., Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005, Translated from the 1981 Japanese original by Kazuo Akao. MR 2109686 (2005h :32030)
- [10] James R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984. MR 755006 (85m :55001)
- [11] Edwin H. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981, Corrected reprint. MR 666554 (83i :55001)

- [12] Hassler Whitney, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957. MR 0087148 (19,309c)